

### Vorlesungstermine:

Donnerstags      08:30 – 10:00 Uhr  
Freitags            08:30 – 10:00 Uhr

Vorlesung fällt aus an folgenden Terminen:

Fr 10.04.09 (Karfreitag)

Do 30.04.09 (keine Vorlesung)

Fr 01.05.09 (Maifeiertag)

Do 21.05.09 (Himmelfahrt)

Fr 22.05.09 (Brückentag, keine Vorlesung)

Do 11.06.09 und Fr 12.06.09 (keine Vorlesung)

Do 09.07.09 und Fr 10.07.09 (letzte Semesterwoche, keine Vorlesung)

(insgesamt 19 Doppelstunden bzw. 38 Einzelstunden: 2.92 SWS )

### Skript zur Vorlesung:

Wird wöchentlich nach der Freitagsvorlesung im Stud.IP als pdf-Dokument zur Verfügung gestellt.

## Übungsgruppen:

Jede Woche (freitags) Ausgabe eines Übungszettel mit mehreren Aufgaben zu aktuellen Themen der Vorlesung (ist dann auch online im Stud.IP verfügbar).

Gruppe 1	Montag	15:00 Uhr
Gruppe 2 + 3	Dienstag	08:30 Uhr
Gruppe 4 + 5	Dienstag	17:30 Uhr
Gruppe 6	Mittwoch	10:30 Uhr
Gruppe 7 + 8	Mittwoch	15:00 Uhr
Gruppe 9	Mittwoch	17:30 Uhr
Gruppe 10	Donnerstag	12:00 Uhr
Gruppe 11	Freitag	10:00 Uhr (2-stündig für Physiker)

Beginn: 1. Zettelausgabe 17.04.09, 1. Übung in Woche vom 20. - 24. April 2009

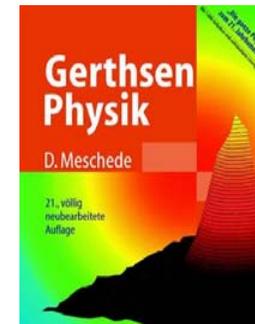
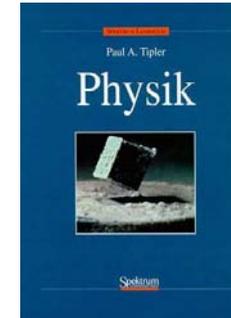
Repetitorium zur Klausurvorbereitung: 14. - 18. September 2009

Klausurtermin: Mittwoch, den 23. September 2009, 9:00 - 12:00 Uhr

## Empfohlene Literatur: Experimentalphysik I + II:

### Lehrbücher

- Tipler: *Physik*, Spektrum-Verlag
- Meschede: *Gerthsen Physik*
- Halliday: *Physik - Bachelor Edition*, Wiley-VCH
- Bergmann, Schäfer: *Experimentalphysik, Mechanik*, de Gruyter



### Nachschlagewerke und Formelsammlungen

- Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch
- Bronstein, Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch
- Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner

# Inhalt der Vorlesung Experimentalphysik II

## Teil 1: Elektrizitätslehre, Elektrodynamik

1. Elektrische Ladung und elektrische Felder
2. Kapazität
3. Elektrischer Strom
4. Magnetostatik
5. Elektrodynamik
6. Schwingkreise und Wechselstrom

## Teil 2: Optik

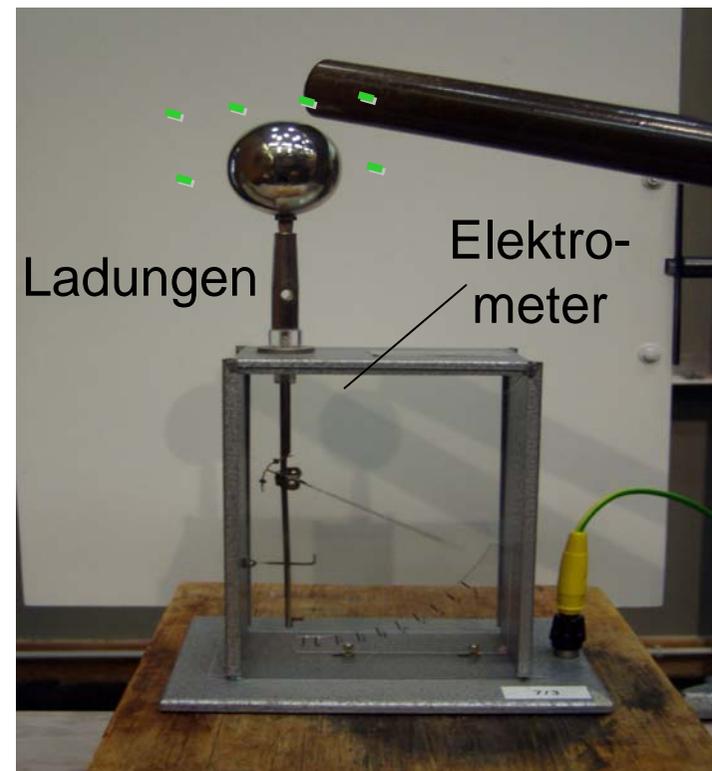
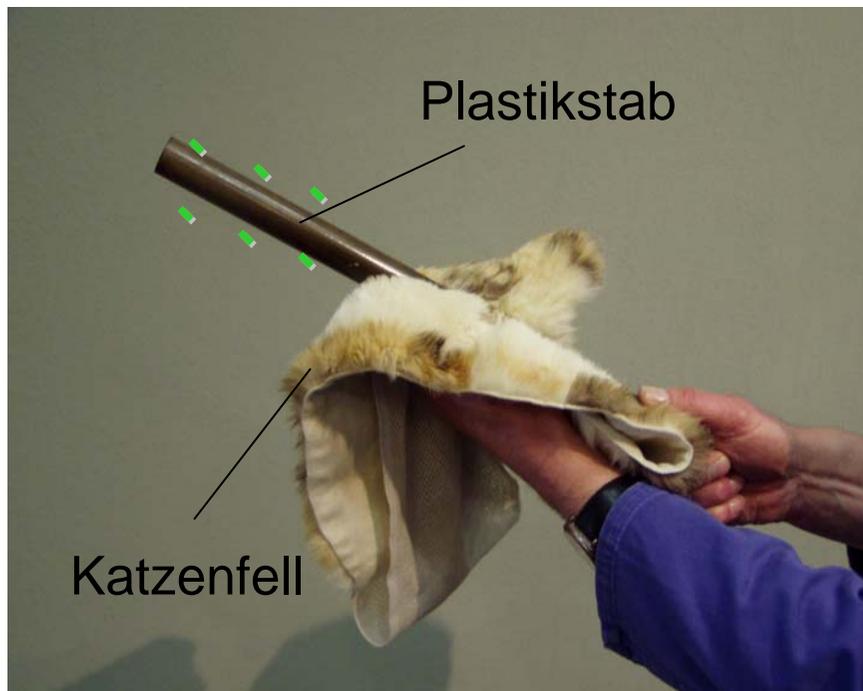
7. Elektromagnetische Wellen
8. Optik

Seiten mit ● sind insbesondere für Studierende der Physik.

## 1 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

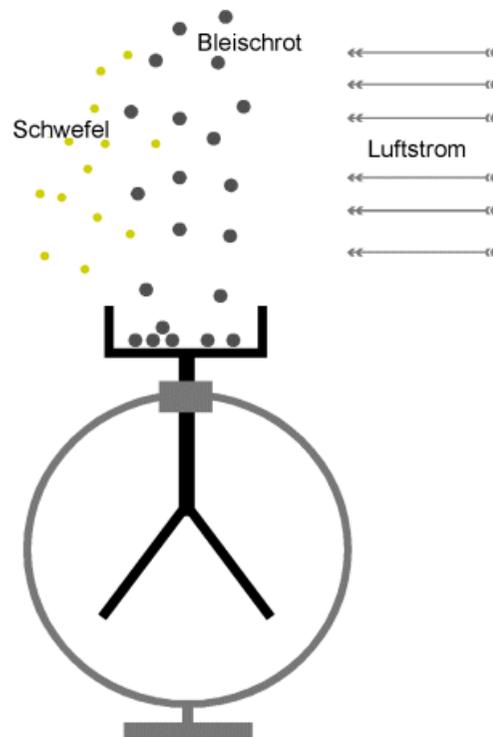
Wenn man einen Plastikstab mit einem Katzenfell reibt, lädt er sich elektrisch auf. Er zieht dann beispielsweise kleine Papierstücke an. Berührt man mit dem Stab einen Metallkörper, dann fließen die Ladungen vom Stab in das Metall ab und laden es auf (Elektrometer). Diesen Vorgang kann man wiederholen und dadurch die Ladungen vermehren.

Versuch: Aufladen eines Elektrometers



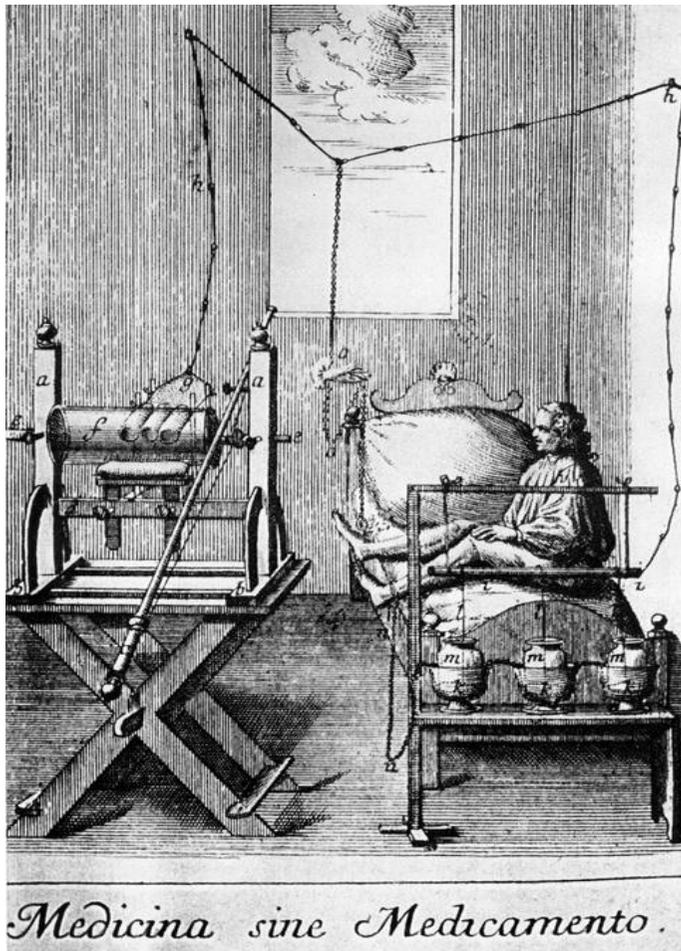
## Ladungstrennung und Berührungselektrizität

Intensive Berührung und anschließende Trennung zweier unterschiedlicher Stoffe führt zu elektrisch geladenen Zuständen. Aufgrund der Berührungselektrizität lässt sich eine Spannungsreihe aufstellen. Bei Kontakt mit einem in der Reihe folgenden Stoff entsteht eine positive Aufladung und bei Kontakt mit einem vorangehenden eine negative Aufladung. Es gilt die Coehnsche Aufladungsregel: Die Substanz mit der größeren Dielektrizitätskonstante (Polarisierbarkeit) lädt sich positiv auf.



"Anwendungen" statischer Elektrizität

in der Medizin ...

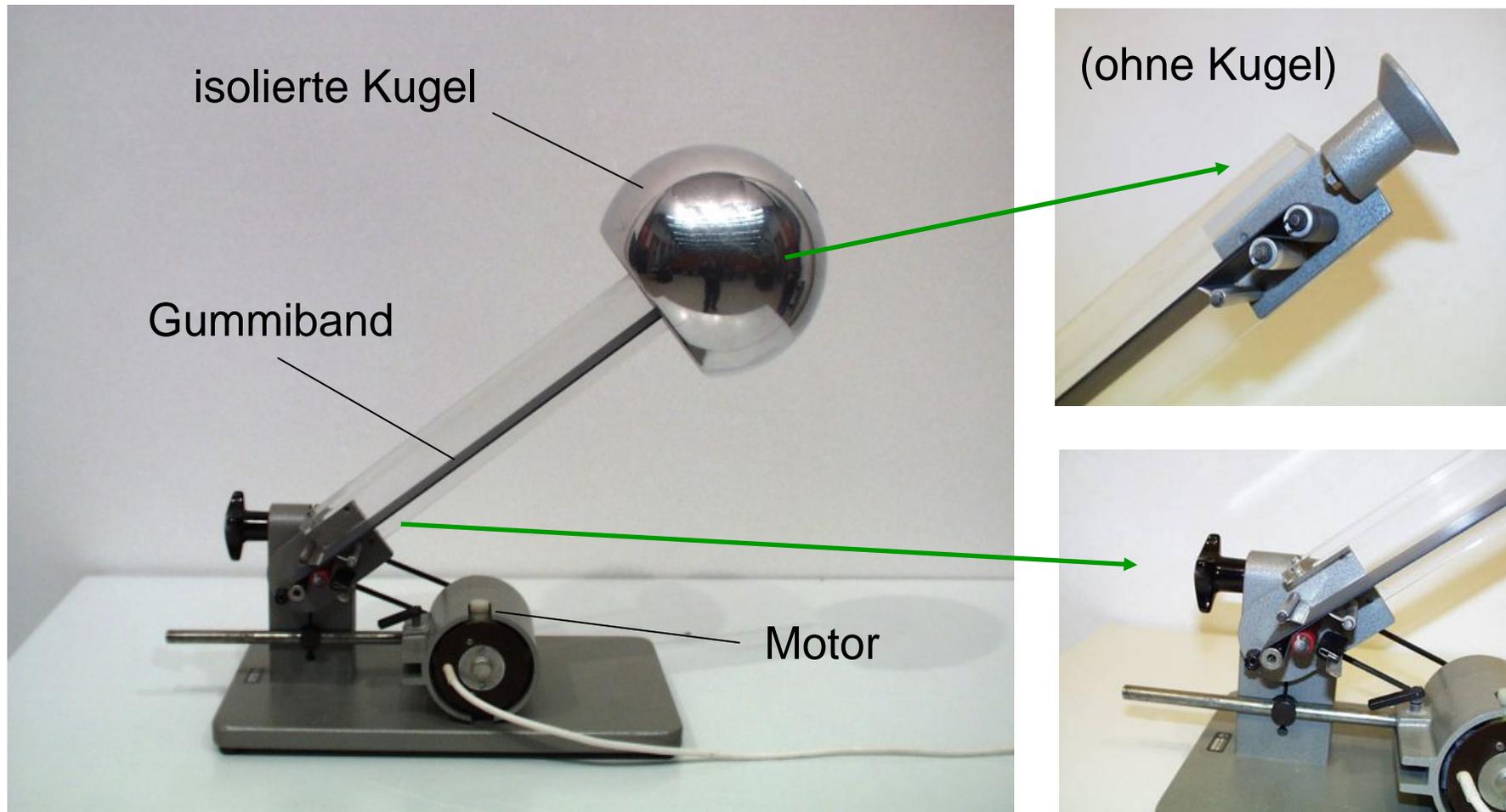


... und zwischenmenschlich: elektrischer Kuss

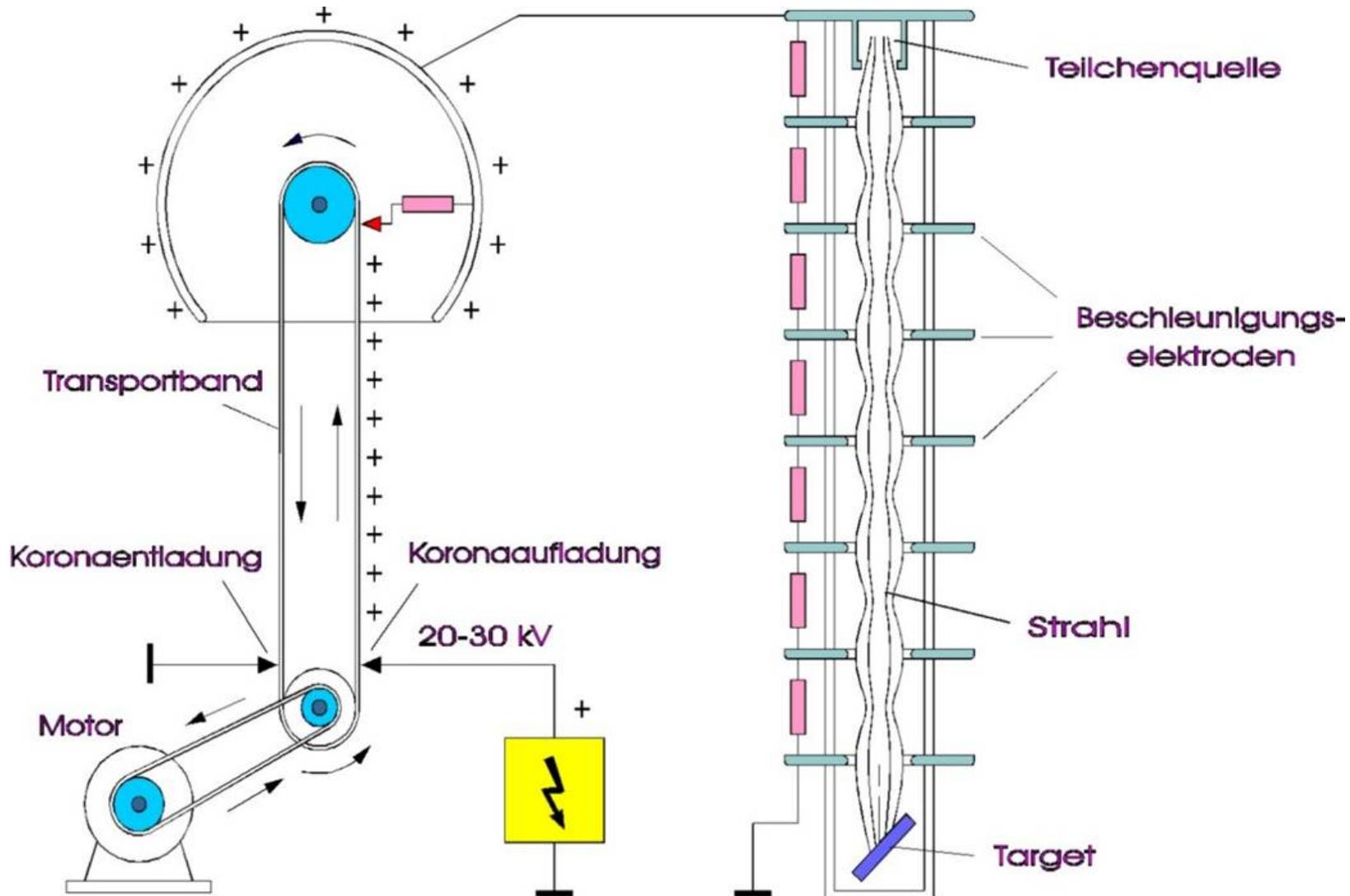


Versuch: Hochspannungserzeugung mit Bandgenerator (nach van de Graaff)

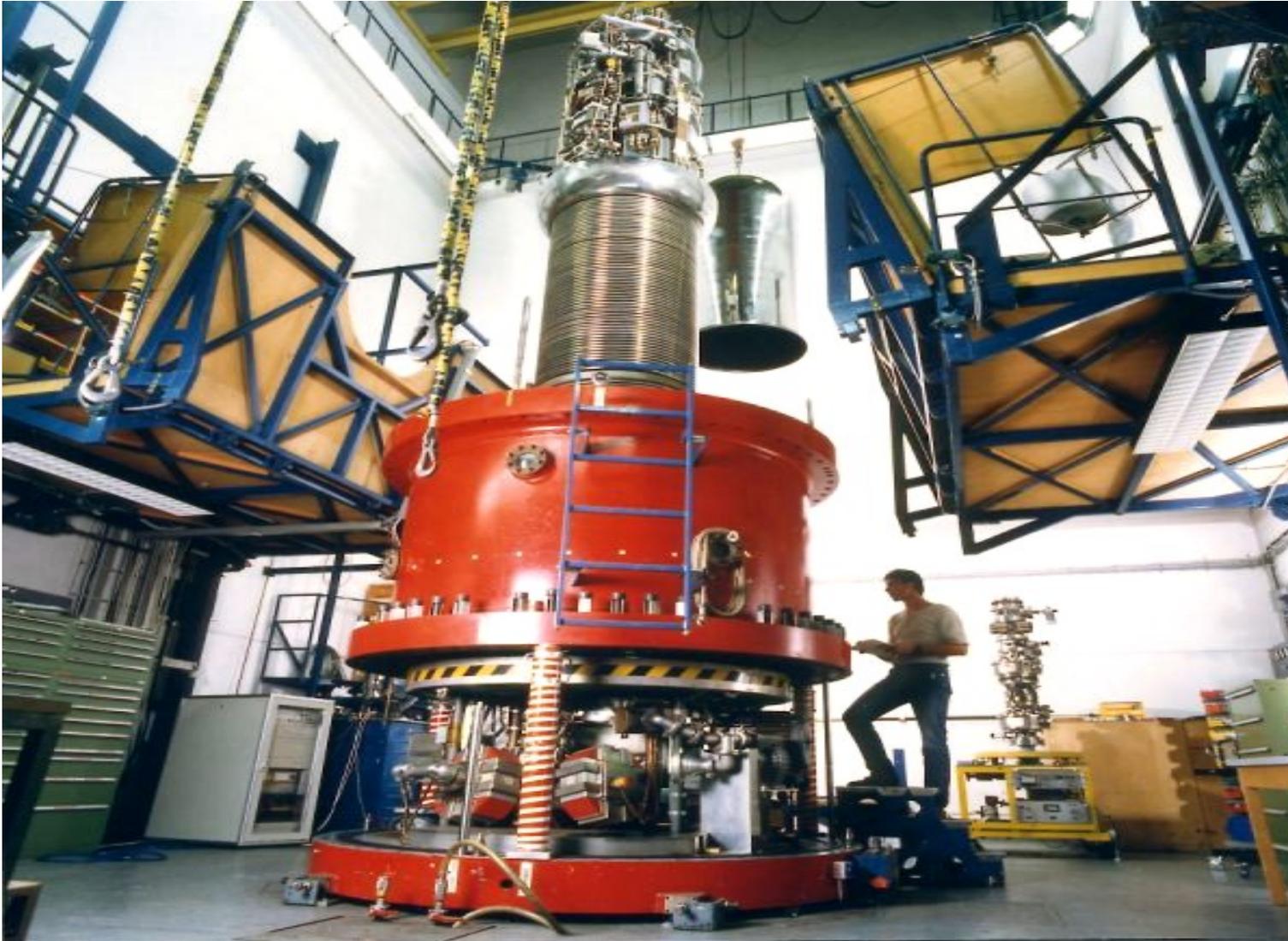
Ladungen werden wie auf einem Fließband (Gummi) in das Innere einer isolierten Metallkugel transportiert.



## Van-de-Graaff-Beschleuniger: Anwendung als Teilchenbeschleuniger



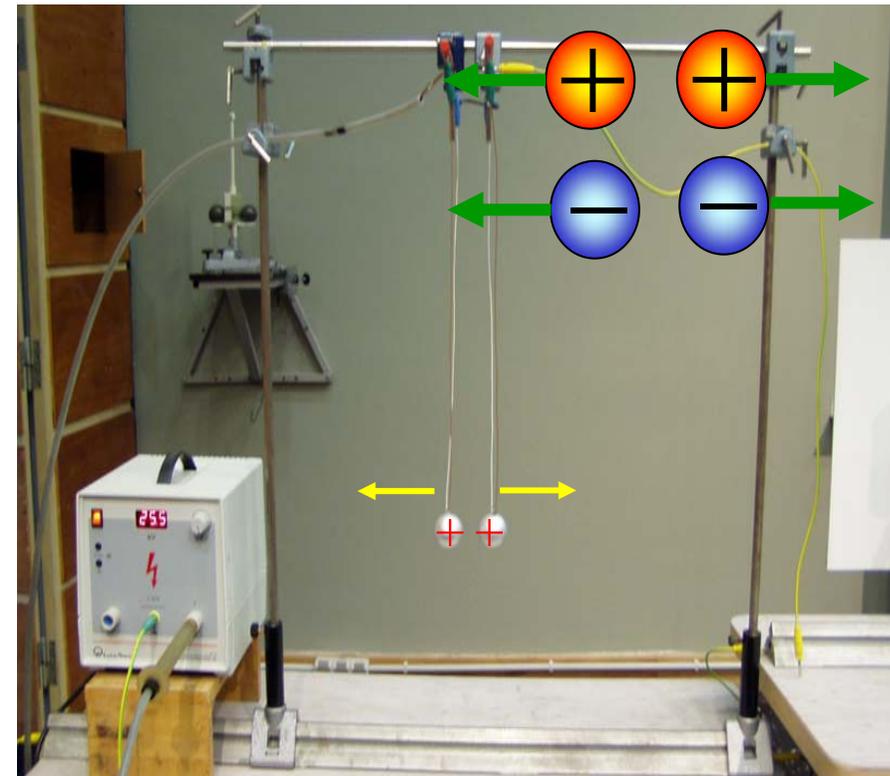
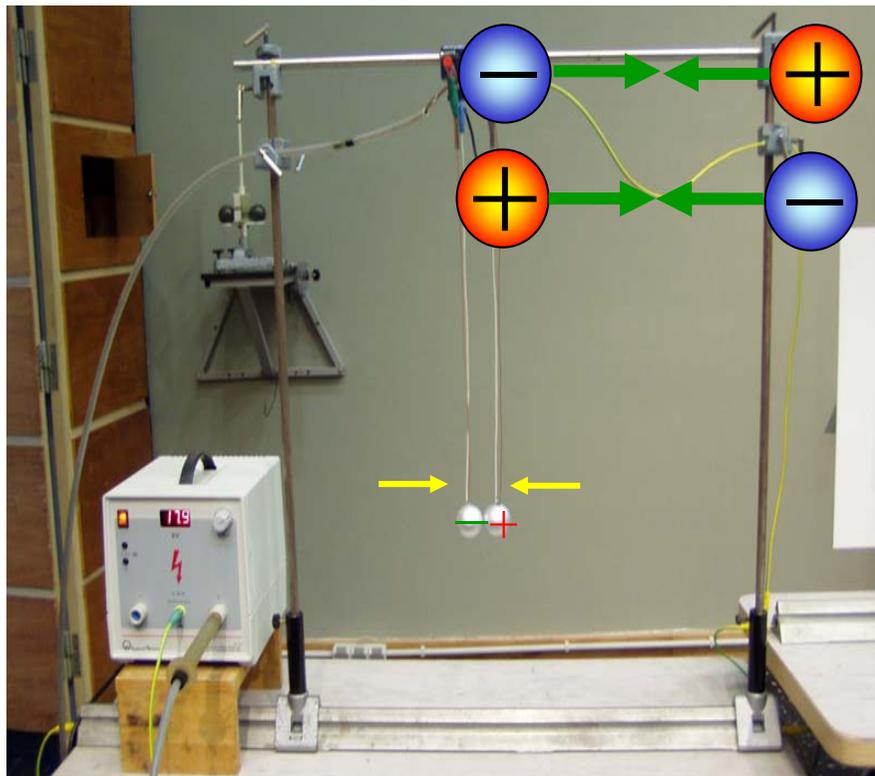
Van-de-Graaff-Beschleuniger: Spannungen bis einige  $10^6$  V (Megavolt)



## 1.1 Elektrische Ladung; Coulomb-Kraft

### Versuch: Kräfte zwischen positiven und negativen Ladungen

Ladungen üben anziehende oder abstoßende Kräfte aufeinander aus:  
ungleiche Ladungen ziehen sich an, gleiche Ladungen stoßen sich ab.



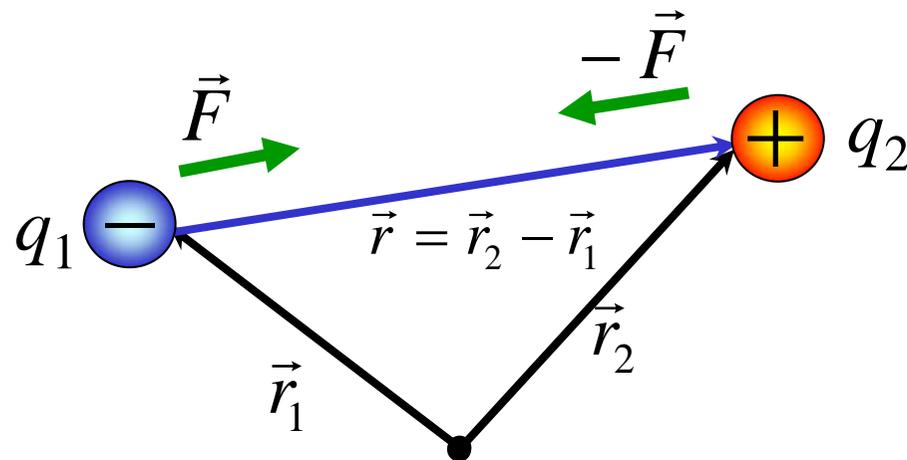
## Einheit der elektrischen Ladung

Die elektrische Ladung kann transportiert bzw. übertragen werden. Die Ladung  $q$  hat also eine „Mengeneigenschaft“ und ihre SI-Einheit ist:

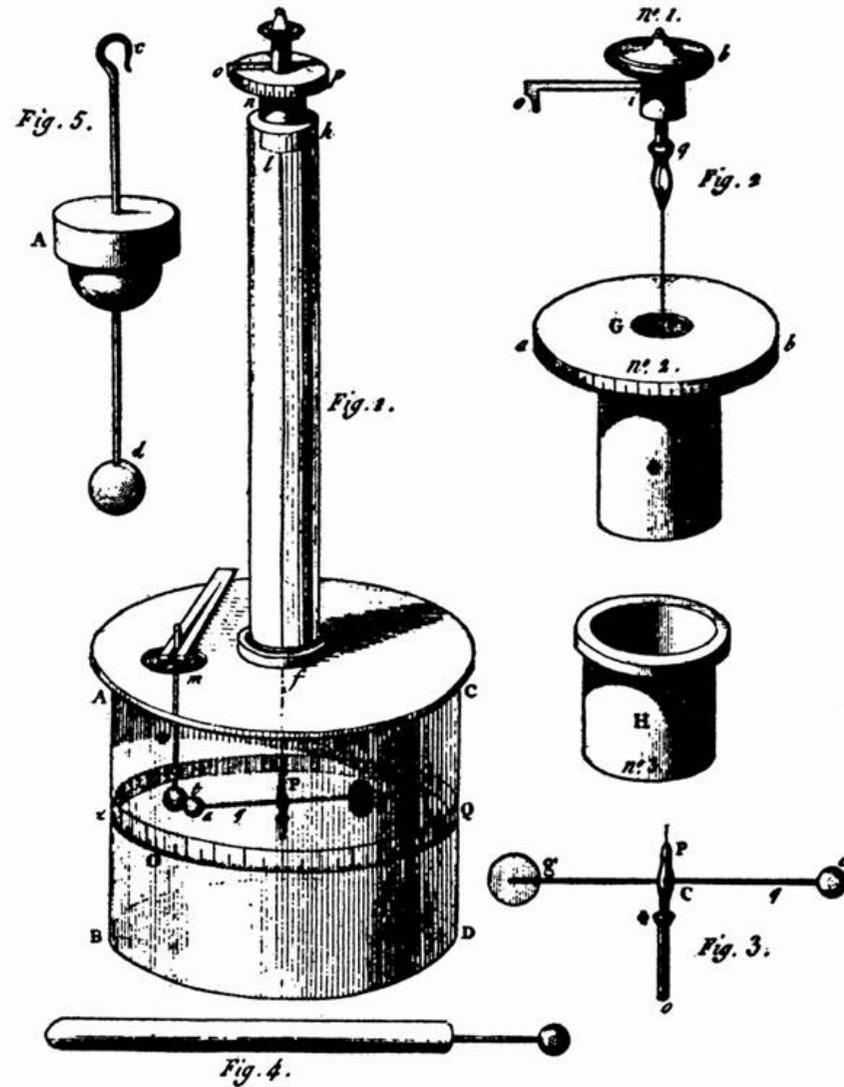
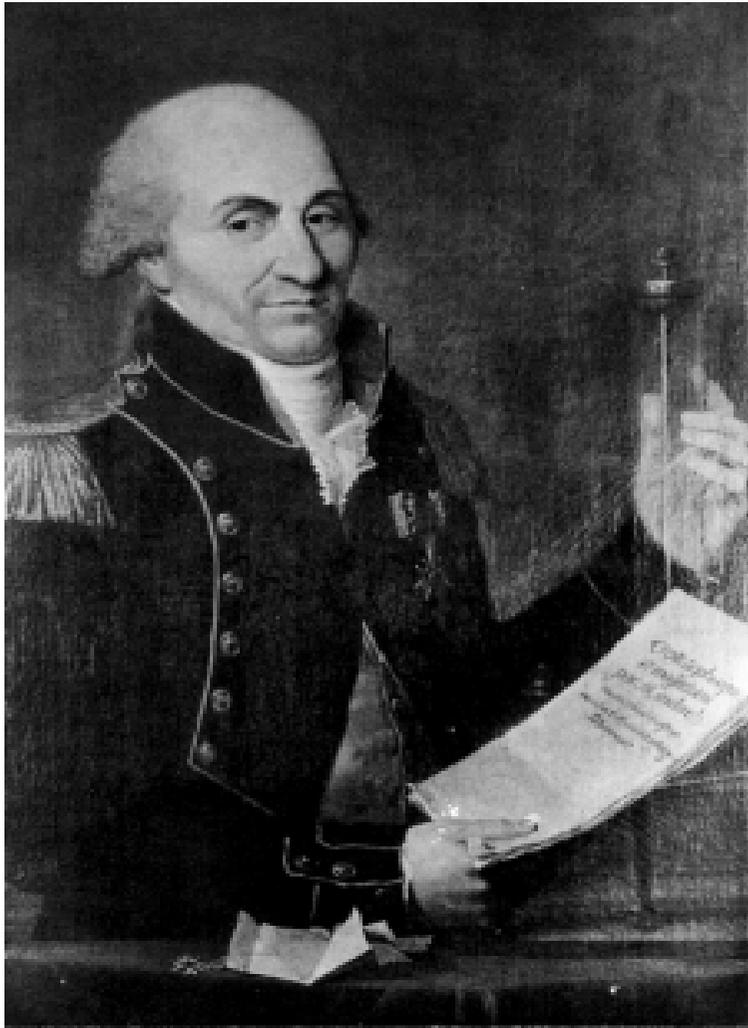
$$1 \text{ C} = 1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ As}$$

Ein Strom der Stärke 1 Ampere transportiert in 1 Sekunde die Ladung 1 Coulomb.

Zwischen den Ladungen wirken Kräfte, die von der Größe der Ladungen und ihrem Abstand abhängen. Die Coulomb-Kraft  $F$ , die zwei punktförmige Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  aufeinander ausüben, soll nun genauer betrachtet werden.



Charles Auguste de Coulomb (1785/1786)



## Coulomb-Kraft

Die elektrische Kraft zwischen zwei geladenen Teilchen wird durch das Coulomb-Gesetz beschrieben:

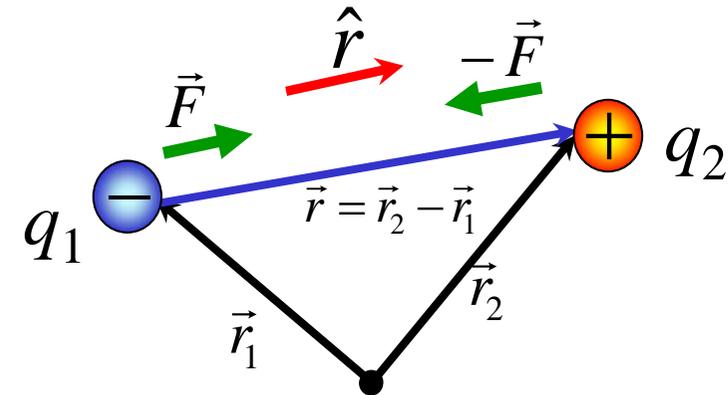
$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Die Kraft zeigt entlang der Verbindungslinie  $\hat{r}$  der beiden Ladungen und kann anziehend ( $q_1 q_2 < 0$ ) oder abstoßend ( $q_1 q_2 > 0$ ) sein.

In der Vorlesung wird immer das SI-System verwendet, für die Konstante  $k$  gilt dann:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Im Gaußschen Maßsystem ist  $k = 1$ .



Das Coulomb-Gesetz lautet damit:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Die Coulomb-Kraft ist eine so genannte Zweikörperkraft. Sie kann durch den Austausch virtueller Teilchen (z.B. virtuelle Photonen) verstanden werden. Dies führt auf die Quantenelektrodynamik.

In der Konstante  $k$  steht die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  des Vakuums. Sie wird auch als elektrische Feldkonstante bezeichnet:

$$\epsilon_0 = 8.854188 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

In Materie ist aufgrund der elektrischen Polarisierbarkeit die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  des Mediums in der Formel für die Coulomb-Kraft zu berücksichtigen:

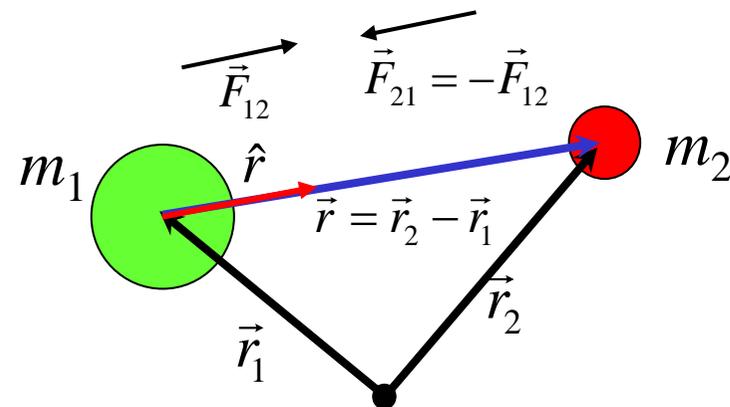
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Der Zahlenwert der Dielektrizitätskonstante für Wasser liegt z.B. bei  $\epsilon = 83$ .

### Analogie zum Gravitationsgesetz

Die Gravitationskraft zwischen zwei Massen  $m_{1,2}$  hatte dieselbe Form wie das Coulomb-Gesetz:

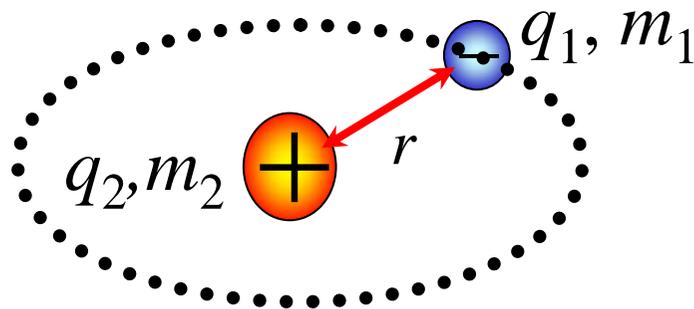
$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{mit} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$



Im Gegensatz zur Coulomb-Kraft ist die Gravitationskraft immer anziehend.

Beispiel: Wasserstoffatom

Vergleich der Größe von Coulomb-Kraft und Gravitationskraft.



Das Elektron mit der Masse  $m_1 = 9.11 \times 10^{-31}$  kg und der Ladung  $q_1 = -1.6 \times 10^{-19}$  C bewegt sich auf Kreisbahn mit  $r = 0.5 \mu\text{m}$  um das Proton mit Masse  $m_2 = 1.67 \times 10^{-27}$  kg und Ladung  $q_2 = +1.6 \times 10^{-19}$  C.

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}}{\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_1 m_2}$$

Die Coulomb-Kraft ist in der Regel deutlich stärker als die Gravitation:

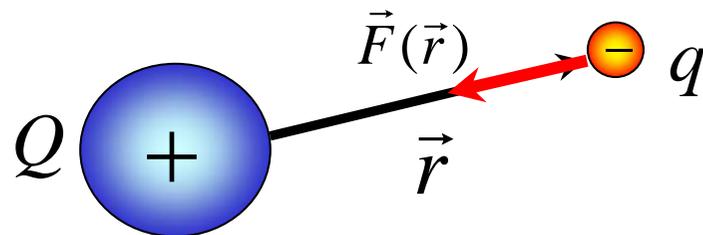
$$F_C / F_G \approx 10^{40}$$

## 1.2 Elektrisches Feld

Das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  ist durch seine Kraftwirkung auf eine (Probe-) Ladung  $q$  definiert. Es gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung  $Q$ .



$$\vec{E}(\vec{r}) = ?$$

Für die Coulomb-Kraft gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Dies lässt sich schreiben als:

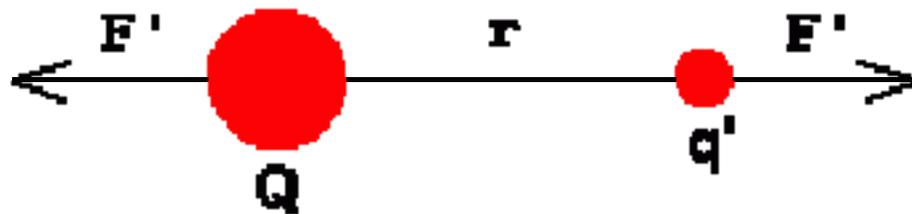
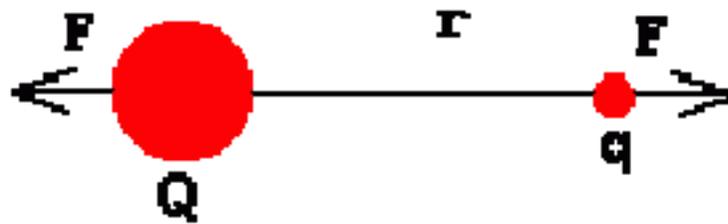
$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ &= q \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Damit ist das elektrische Feld einer Punktladung  $Q$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

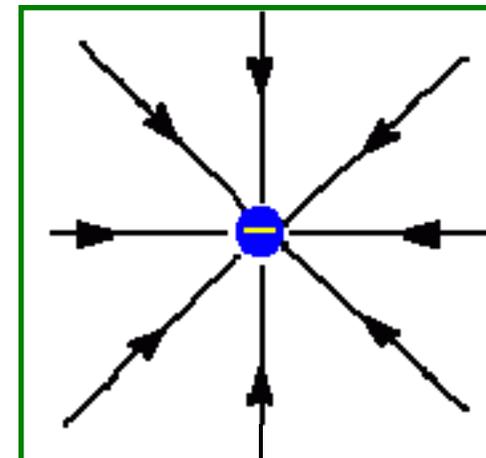
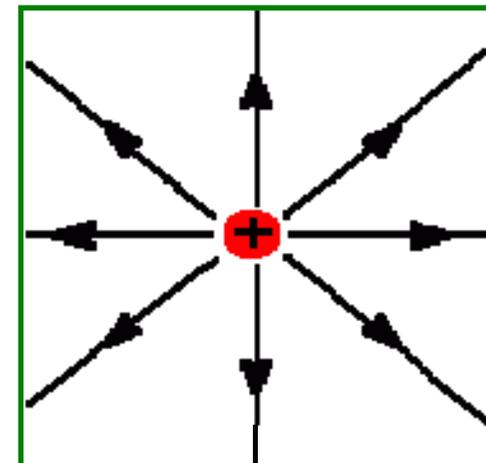
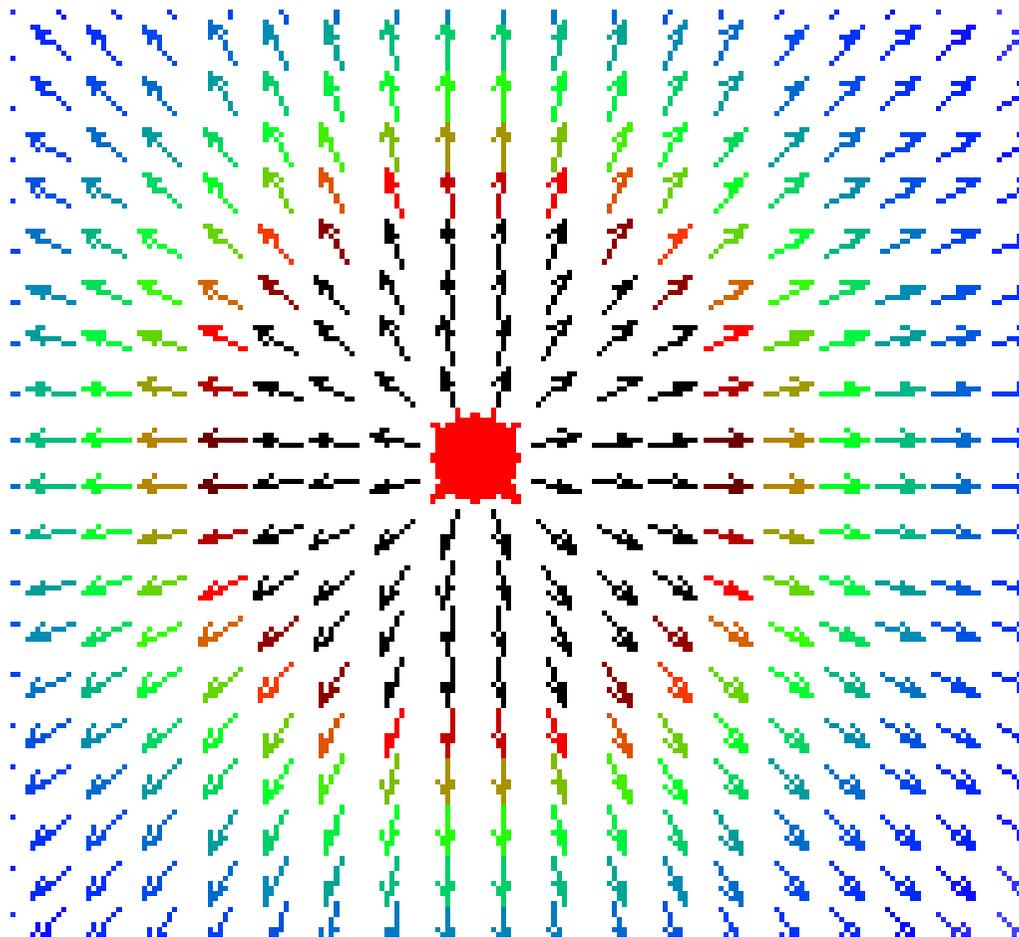
Für eine positive Ladung zeigt der Feldvektor radial nach außen, bei einer negativen Ladung radial nach innen.

Das elektrische Feld kann mit Probeladungen  $q$  ausgemessen werden. In jedem Punkt im Raum wird der Quotient aus Probeladung und wirkender Kraft bestimmt und ergibt die Feldstärke, welche sich anschaulich durch Feldlinien darstellen lässt.



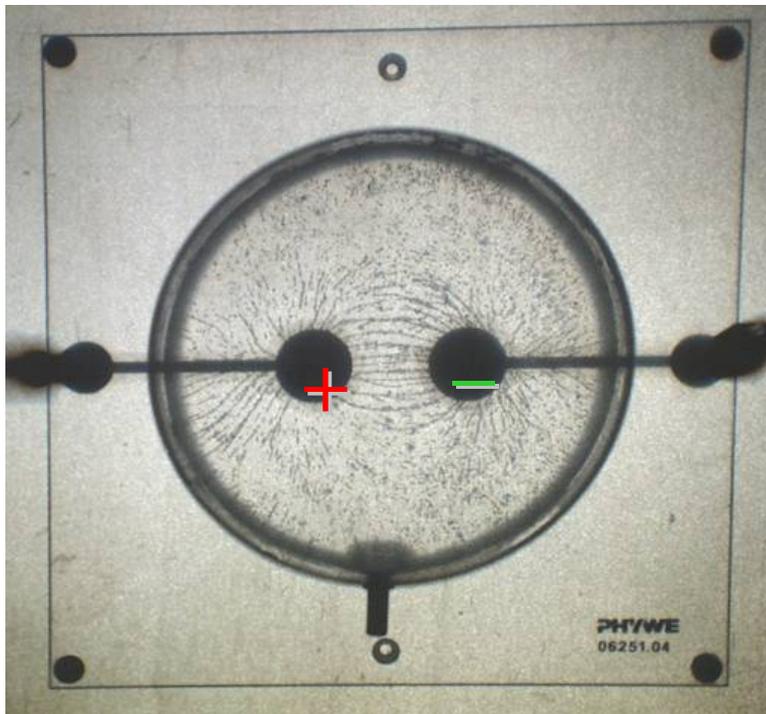
$$\frac{F}{q} = \frac{F'}{q'} = \text{konstant für einen Punkt im Raum}$$

## Feldlinienbild einer Punktladung

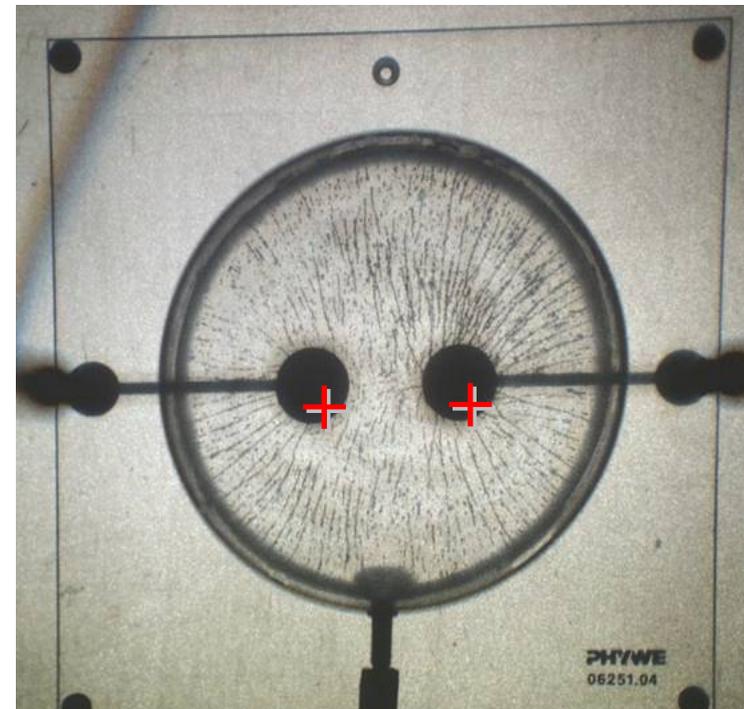


Versuch: Feldlinienbilder

Mit Hilfe von Grieskörnern in Glyzerin lassen sich Feldlinien sichtbar machen. Die Grieskörner bilden aufgrund ihrer Polarisierbarkeit kleine Dipole, welche sich gegenseitig Anziehen bzw. Ausrichten und hierdurch sichtbare Ketten bilden.



Ladungen mit  
ungleichem Vorzeichen



Ladungen mit  
gleichem Vorzeichen

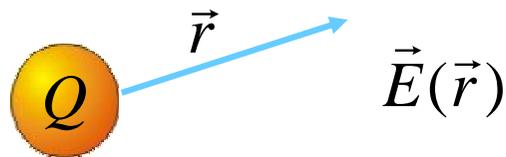
## Größe von elektrischen Feldern

**Tabelle 18.1** In der Natur und in unserer technischen Umgebung vorkommende elektrische Felder

	$E/N \cdot C^{-1}$
Stromleitungen von Wohnhäusern	$10^{-2}$
Radiowellen	$10^{-1}$
In der Atmosphäre	$10^2$
Sonnenlicht	$10^3$
Unter einer Gewitterwolke	$10^4$
In einem Blitz	$10^4$
In einer Röntgenröhre	$10^6$
Am Ort des Elektrons eines Wasserstoffatoms	$6 \cdot 10^{11}$
Auf der Oberfläche eines Urankernes	$2 \cdot 10^{21}$

## Das Superpositionsprinzip

Eine einzelne Ladung  $Q$  erzeugt im Abstand  $r$  das elektrische Feld:

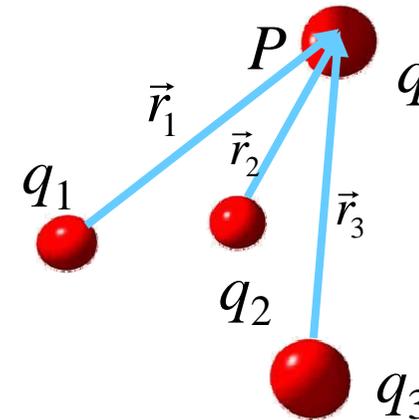
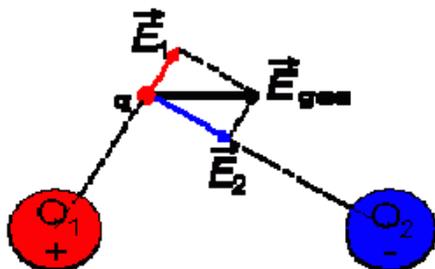


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Wie groß ist das Feld in einem Punkt  $P$ , wenn mehrere Ladungen in der Nähe sind?

Lösung: vektorielle Addition

Überlagerung zweier Felder



Das Feld bei der Ladung  $q$  am Punkt  $P$  ist

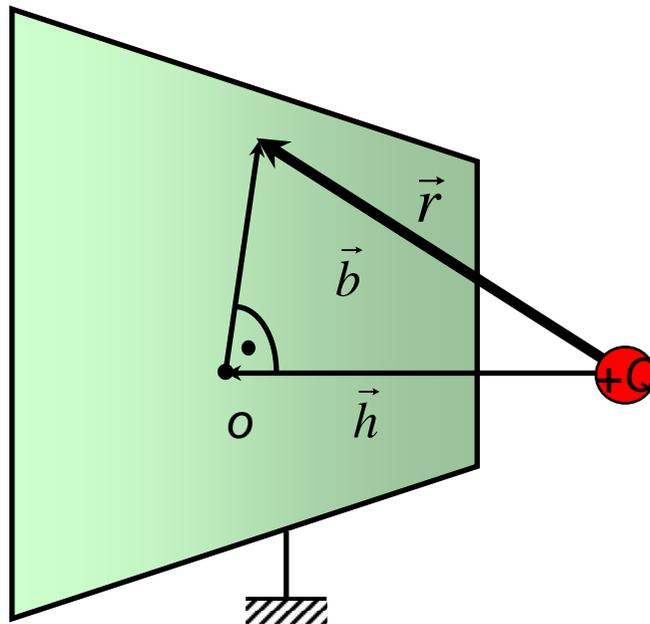
$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$$

und die Kraft auf  $q$  lautet  $\vec{F} = q \vec{E}_P$ .

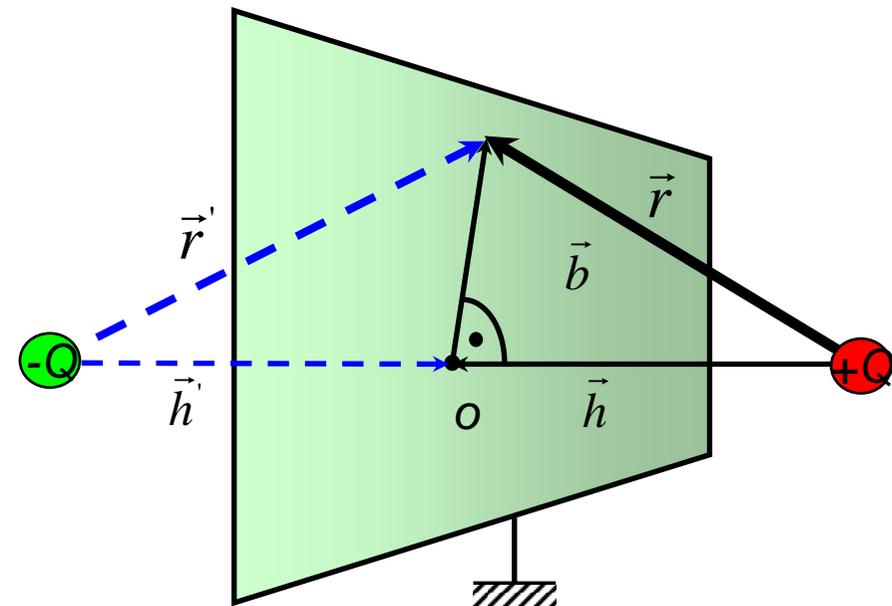
Das resultierende Feld und die Kraft lassen sich durch eine Überlagerung (Superposition) der Einzelfelder bestimmen.

## Berechnung von Feldern

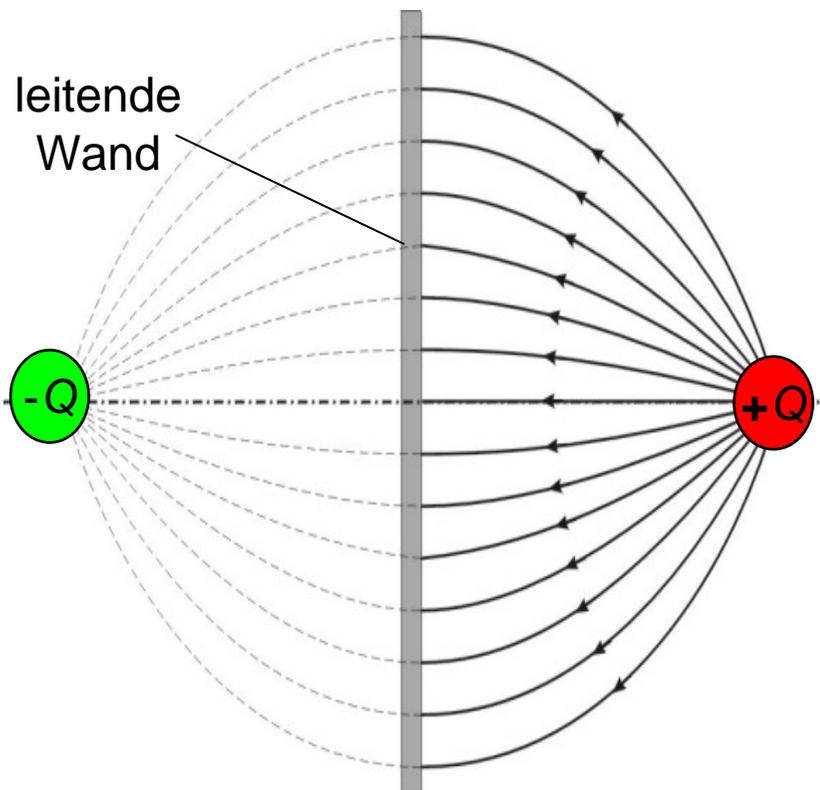
Elektrisches Feld einer Punktladung  $+Q$  vor einer ideal leitenden Wand: Feldlinien müssen senkrecht auf der Wand stehen. Das Feld ist also nicht einfach durch das elektrische Feld einer Punktladung gegeben.



Ladungen auf der Wand müssen sich so verschieben, dass Feldlinien senkrecht aus der Wand austreten. Dies lässt sich durch Einführen einer Spiegelladung  $-Q$  hinter der Wand erreichen, welche dann die Nebenbedingungen, die durch die leitende Ebene eingeführt worden sind, automatisch erfüllt.



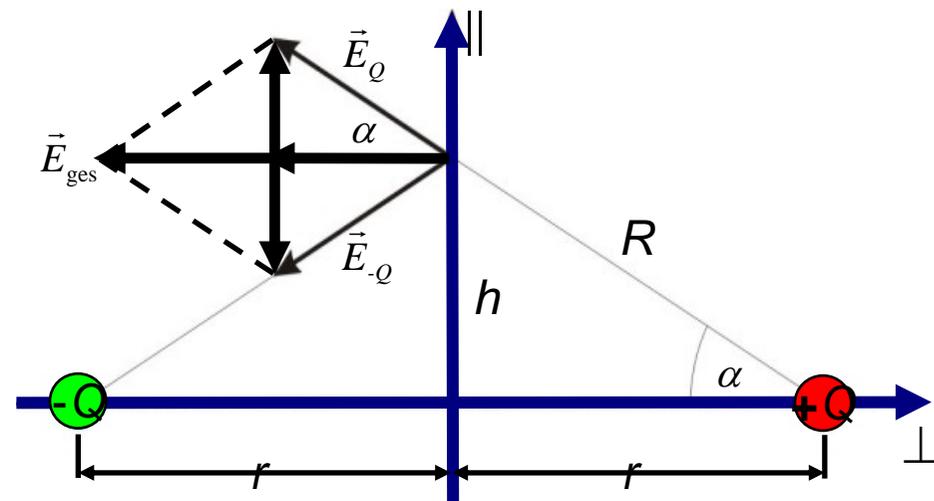
Das Problem ist jetzt also äquivalent zur Berechnung des elektrischen Feldes zweier Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen (s. Dipol).



Die senkrechten Komponenten der von der Ladung  $+Q$  und Spiegelladung  $-Q$  an der Wand erzeugten Felder sind:

$$E_{\perp}^{+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + r^2} (-\cos \alpha)$$

$$E_{\perp}^{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{h^2 + r^2} \cos \alpha$$



Die senkrechte Komponente der resultierenden Feldstärke an der Wand ist damit:

$$E_{\perp} = E_{\perp}^{+} + E_{\perp}^{-} = \frac{-1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2 + r^2} \cos \alpha$$

Die horizontale Komponente der Feldstärke an der Wand ist:

$$E_{\parallel}^{+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q}{h^2 + r^2} \sin \alpha$$

$$E_{\parallel}^{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{h^2 + r^2} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow E_{\parallel} = E_{\parallel}^{+} + E_{\parallel}^{-} = 0$$

Die resultierende horizontale Komponente verschwindet.

Mit

$$\cos \alpha = \frac{r}{R} = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

folgt die Feldstärke an der leitenden Wand zu:

$$\begin{aligned} E(r, h) = E_{\perp} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2 + h^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

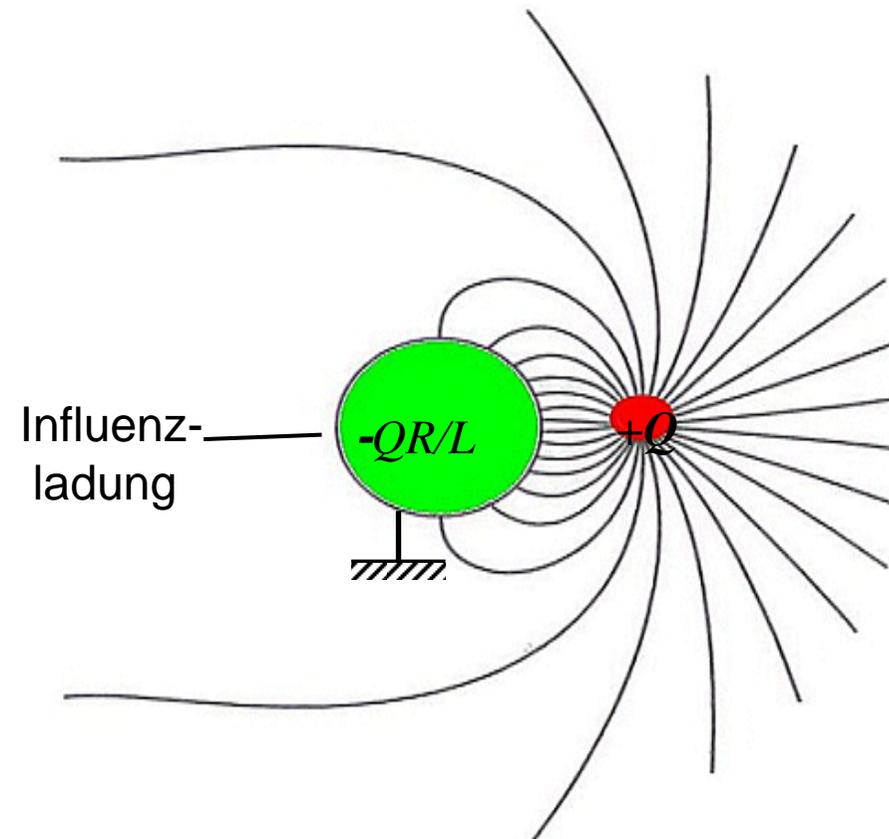
Durch Superposition der Felder der Ladung und ihrer Spiegelladung kann die Feldstärke in jedem Punkt vor der Wand berechnet werden. Diese so genannte „Spiegelladungsmethode“ lässt sich in der Regel nur bei einfachen symmetrischen Randbedingungen anwenden.

Das elektrische Feld einer Punktladung  $+Q$  vor einer leitenden, geerdeten Kugel lässt sich analog berechnen, wobei die Lage der Spiegelladung etwas schwieriger zu bestimmen ist.

Analog zum Fall der leitenden Ebene werden auf der Kugel wieder Ladungen verschoben. Man kann zeigen, dass die Kugel insgesamt die Ladung  $-QR/L$  erhält. Diese Ladung erhält sie aus dem „Reservoir“ der Erde.

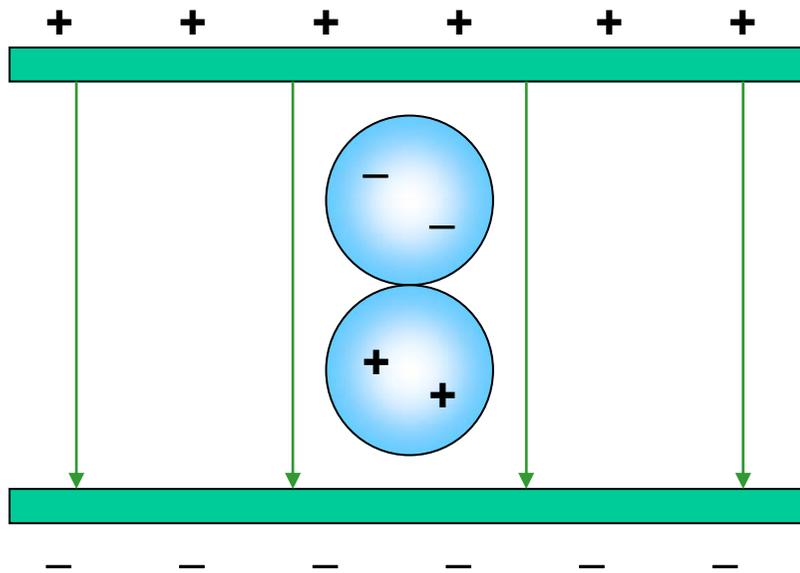
Das Phänomen, dass eine Ladung vor einem Leiter die Ladungen in diesem Leiter verschiebt, heißt Influenz.

Elektrisches Feld einer Punktladung vor einer leitenden, geerdeten Kugel:



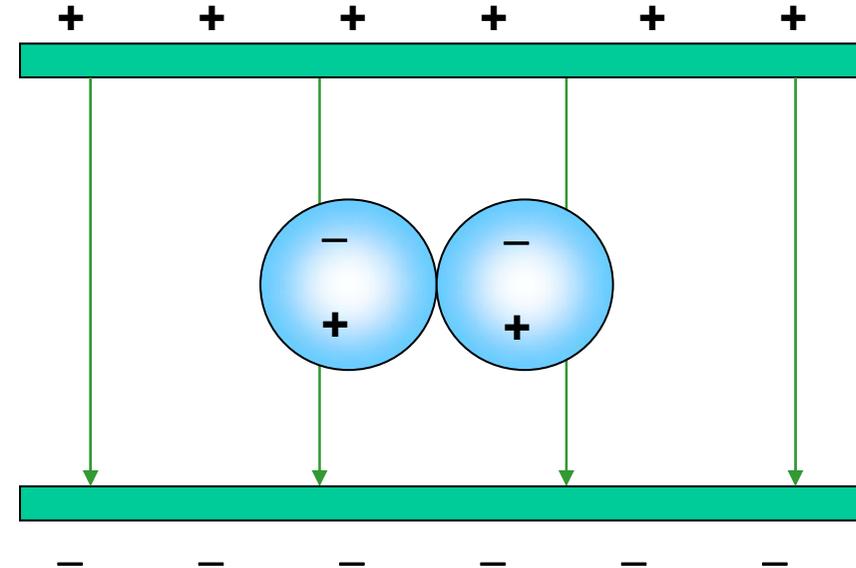
## Influenz

Werden leitende Kugeln in ein elektrisches Feld gebracht, so verschieben sich die in ihnen frei beweglichen Ladungen aufgrund der Influenz.

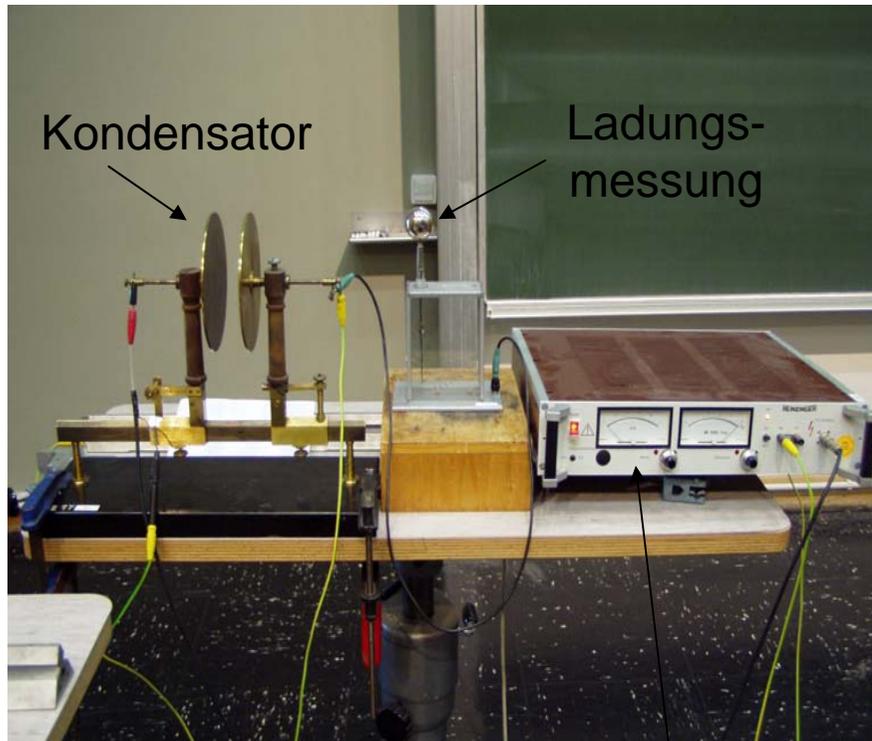


Nach der Trennung im Feld sind die Kugeln elektrisch geladen.

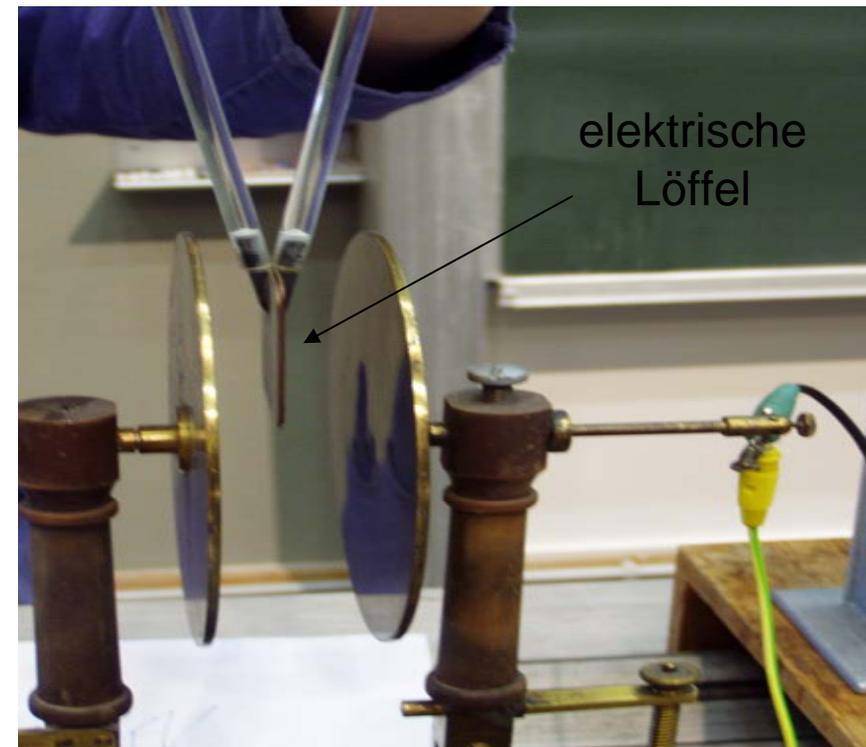
Wenn die Kugeln parallel zu den Platten ins Feld gebracht werden, dann werden die Ladungen auf jeder einzelnen aufgrund der Influenz verschoben. Nach der Trennung und dem Entfernen aus dem Feld gleichen sich die Ladungen aber wieder aus, und die Kugeln sind ungeladen.



Versuch: Leitende Platten im E-Feld



Hochspannungs-  
quelle

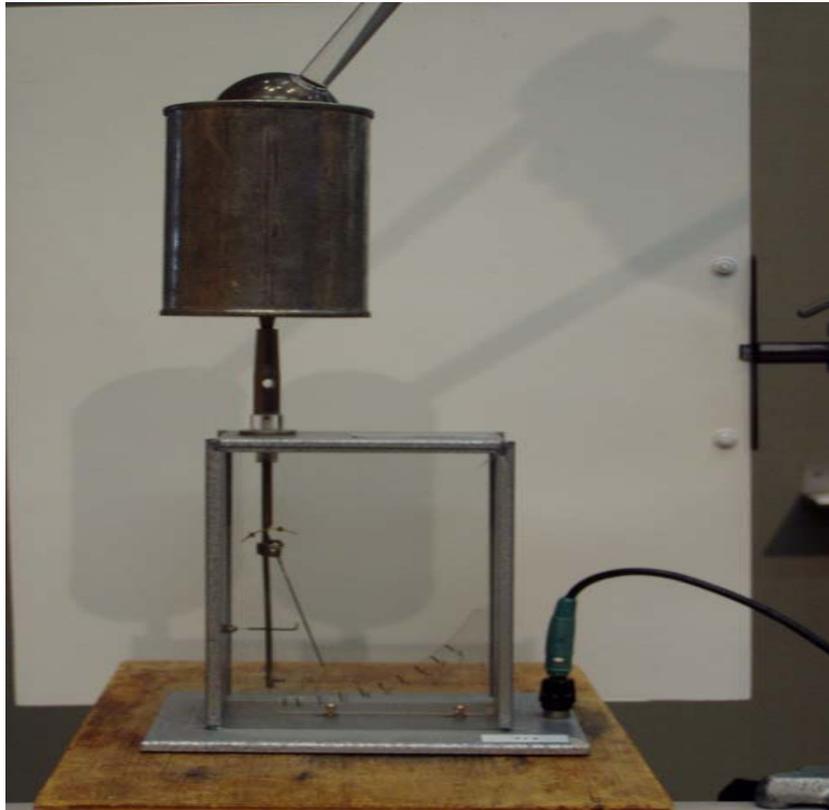


elektrische  
Löffel

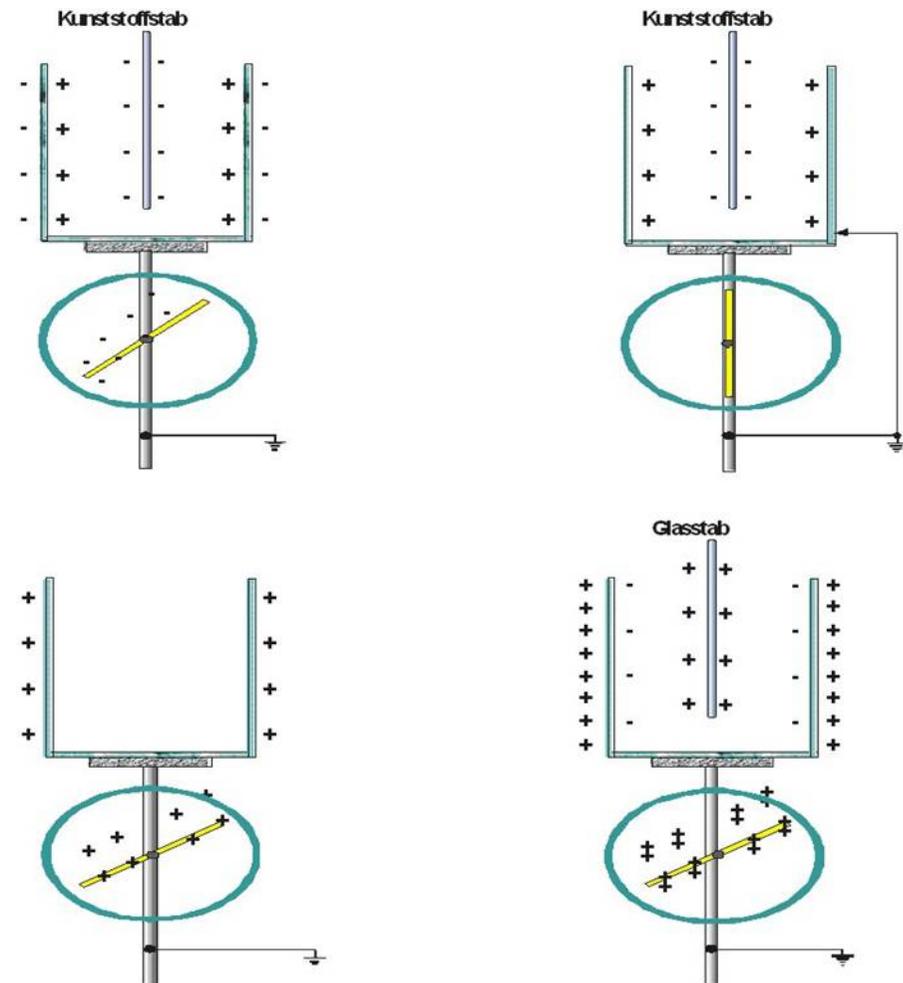
Die elektrisch neutralen Platten (Löffel) werden zusammengedrückt in das elektrische Feld geführt. Dann werden sie getrennt und aus dem Feld genommen. Danach tragen sie jeweils eine Ladung mit unterschiedlichem Vorzeichen.

Versuch: Elektrometer

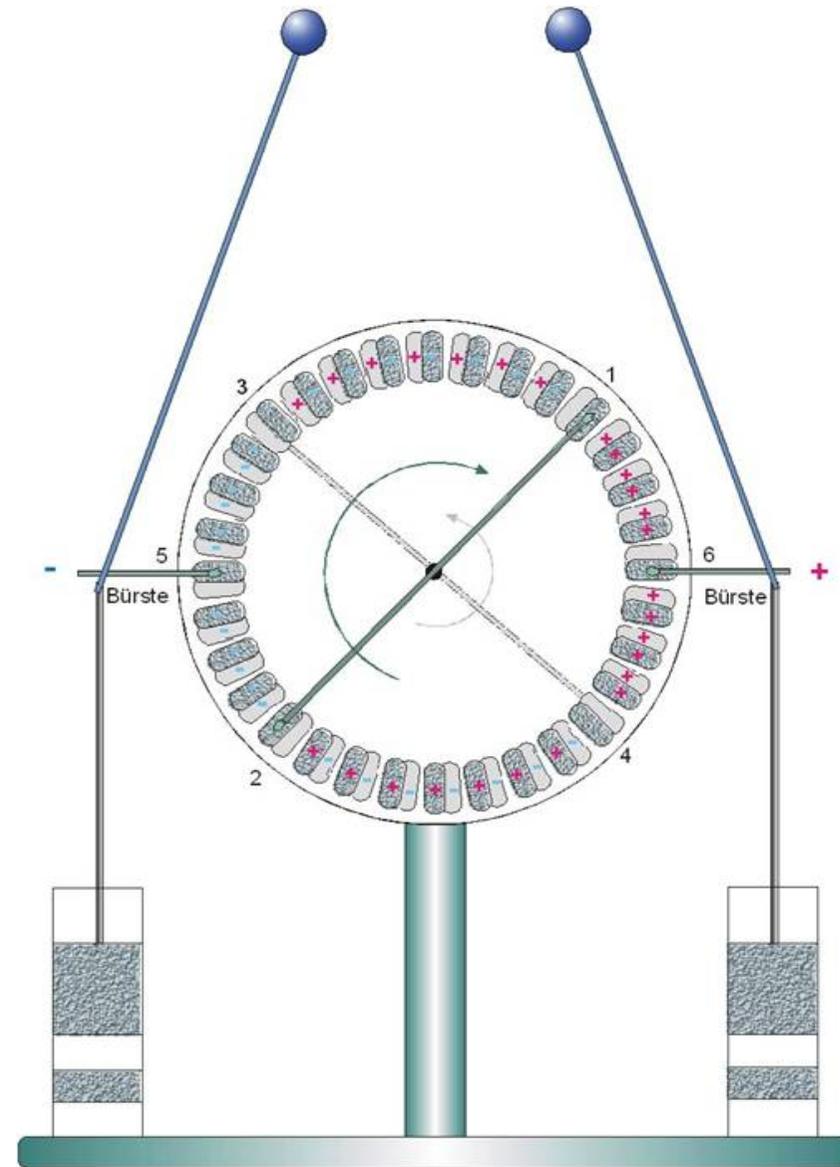
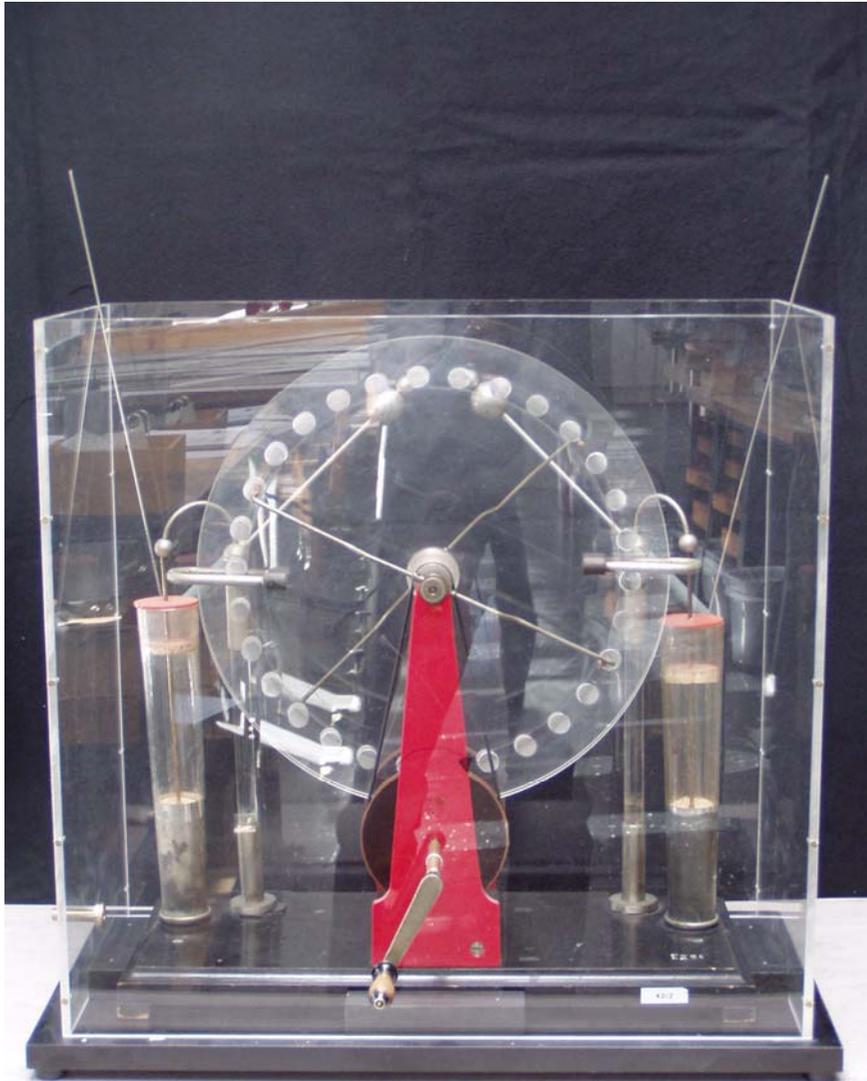
Dein geladener Stab wird in das Innere eines leitenden Zylinders gebracht, welcher elektrisch leitend mit einem Elektrometer verbunden ist.



Erklärung des Versuches:



Versuch: Influenzmaschine



$K_1, K_2$  - Konduktorkugeln

$P_1, P_1', P_2, P_2'$  - jeweils verbundene Metallpinsel  $\Rightarrow$  Reibungselektrizität

$S_1, S_2$  - „Ladungsabsaugvorrichtungen“ (Spitzen)

Reibungselektrizität:  $P_2 \Rightarrow B_1$  positiv geladen

Weitertransport zu den Stellungen  $B_2, B_3$

$\Rightarrow$  negative Influenzladung bei  $A_1$

Weitertransport zu den Stellungen  $A_2, A_3$

$\Rightarrow$  positive Influenzladung bei  $B_1$  usw.

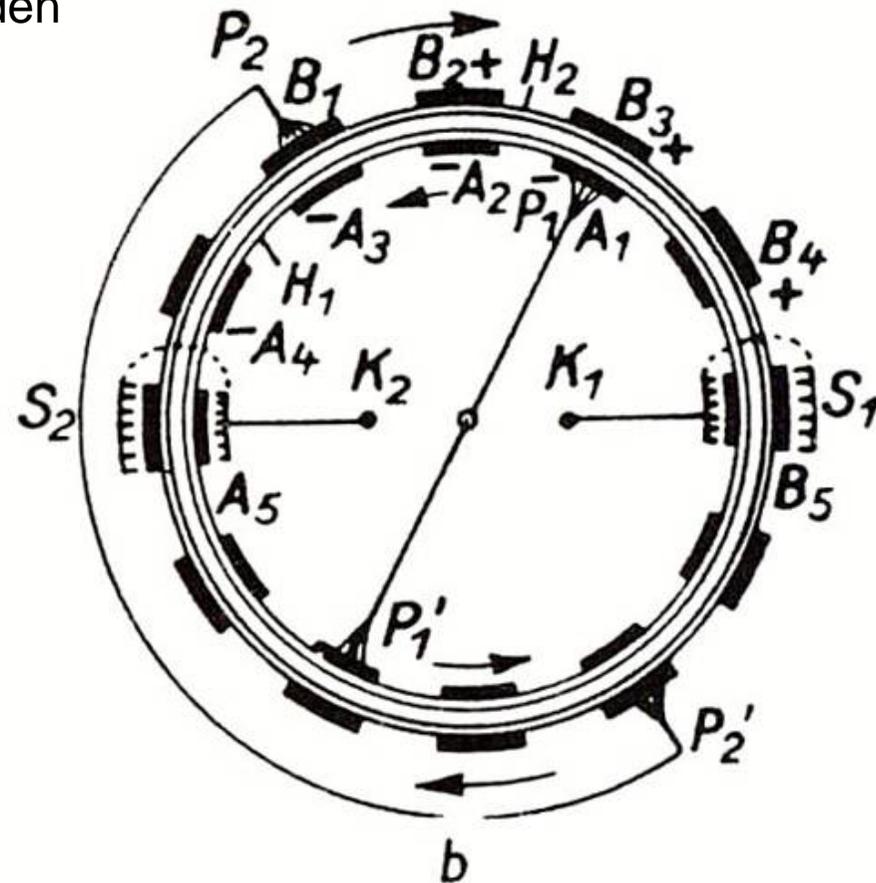
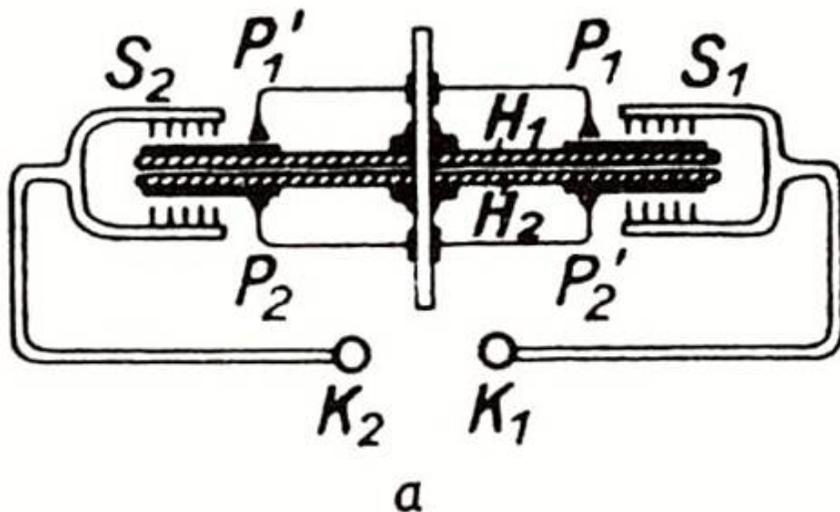


Abb. 93. Zur Wirkungsweise der Influenzmaschine

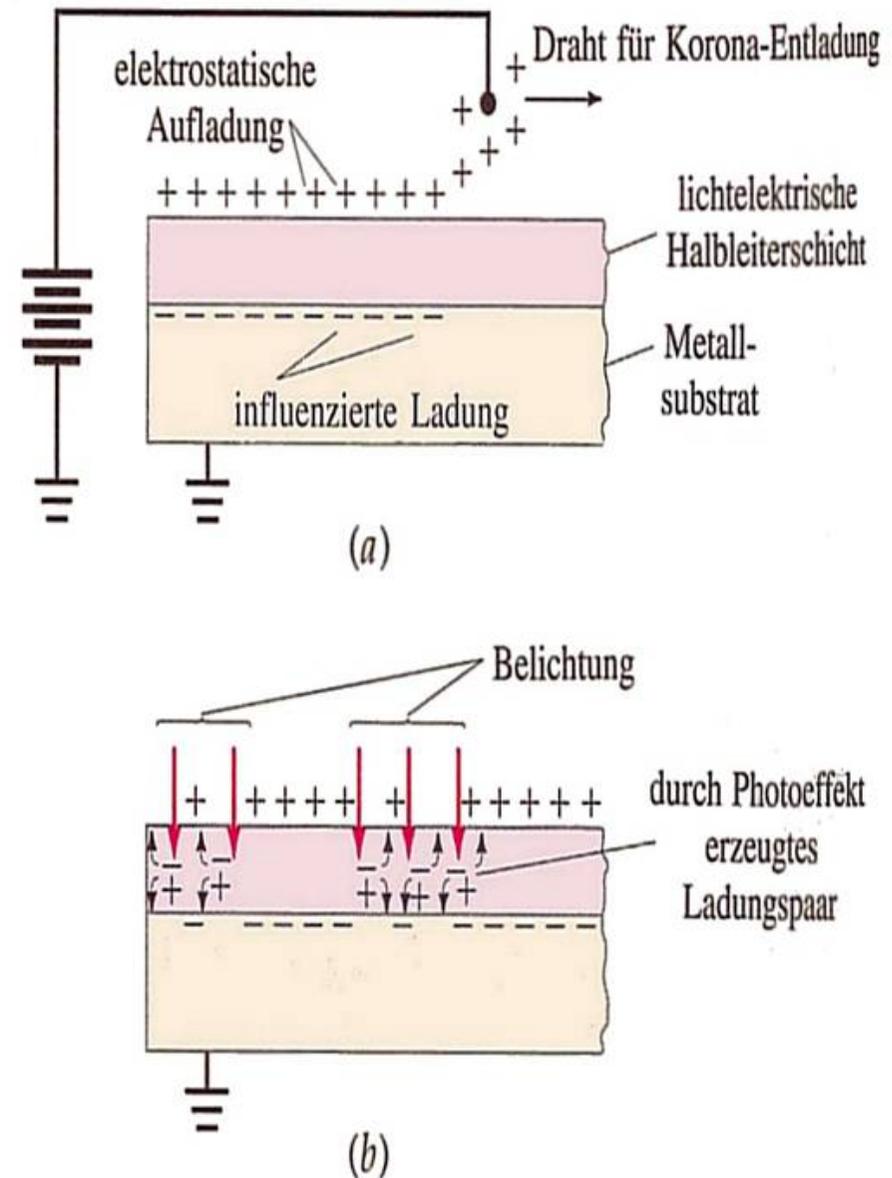
**Beispiel: Prinzip des Fotokopierers**

(erfunden 1937 von Chester Charlton „Xerographie“ = trockenes Schreiben)

Der Kopiervorgang lässt sich in vier Schritte zerlegen:

Elektrostatische Aufladung (a) eines lichtempfindlichen Halbleiters, der sich auf einem Metallsubstrat befindet (lichtempfindlicher HL: dunkel-Isolator, hell-Leiter). Die Platte wird auf etwa 1000 V aufgeladen  $\Rightarrow$  negative Influenzladung auf dem Metallsubstrat.

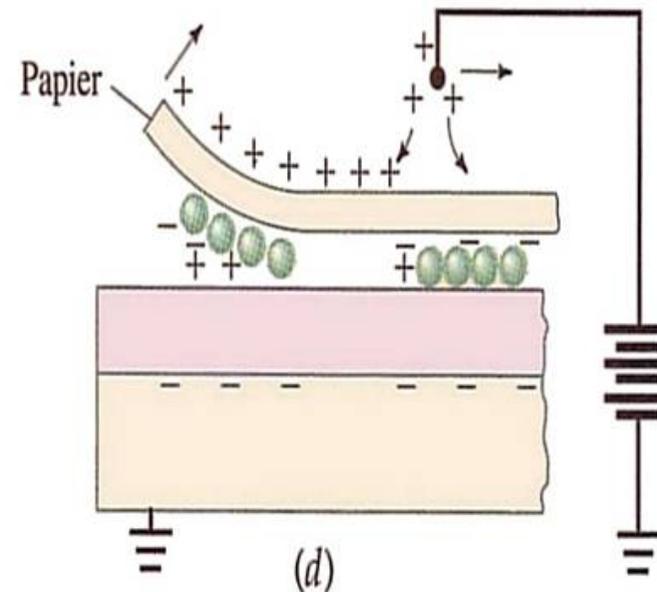
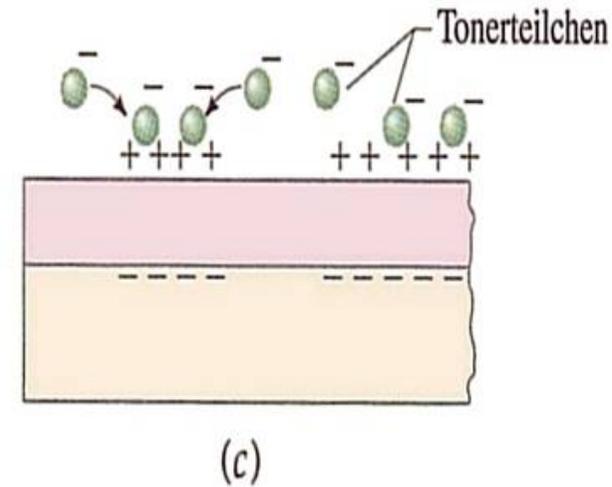
Optische Belichtung (b) führt zu beweglichen Ladungspaaren im HL  $\Rightarrow$  Ladungen neutralisieren sich wo das Licht auftrifft. Optisches Bild  $\Rightarrow$  elektrostatisches Bild



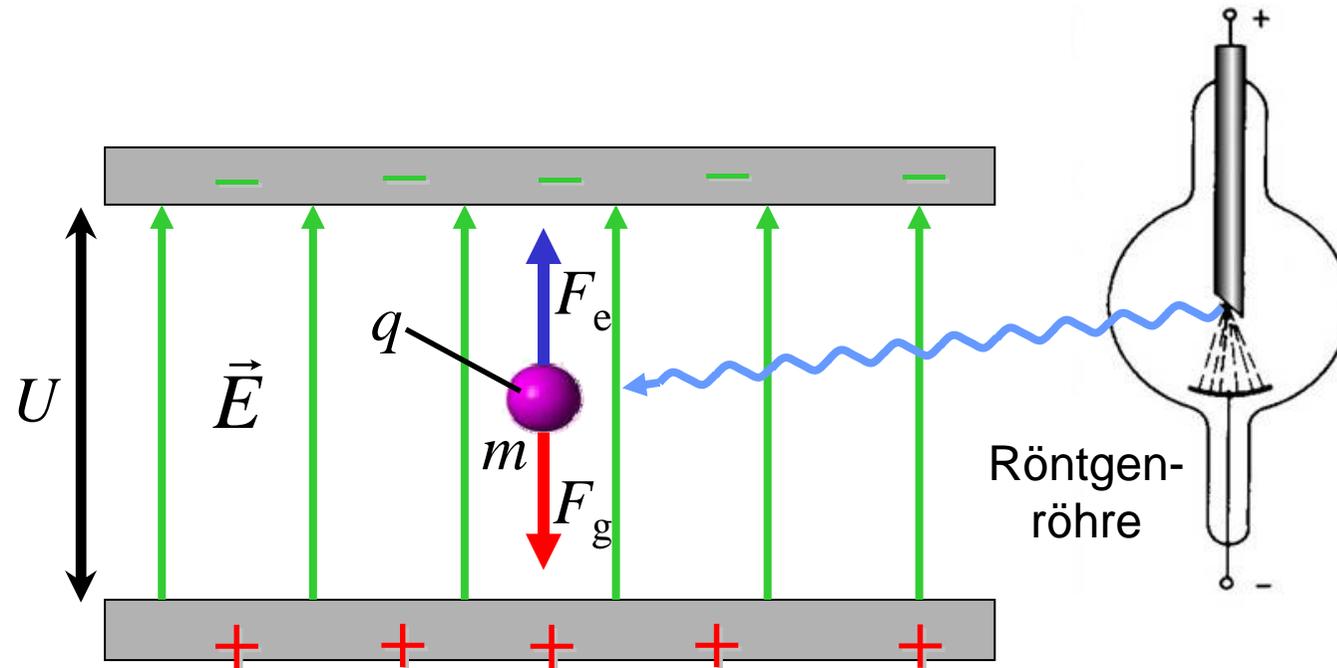
Negativ geladene Tonerteilchen (c) lagern sich an den Gebieten positiver Ladung an  $\Rightarrow$  „Tonerbild“

Der Toner (d) wird an ein positiv geladenes Blatt Papier weitergegeben. Kurzes Erhitzen verbindet den Toner mit dem Papier  $\Rightarrow$  Papierbild.

Elektronenmikroskopaufnahme von Tonerteilchen, die an einem größeren Teilchen elektrostatisch „kleben“.



### 1.3 Quantisierung der Ladung: Millikan-Versuch (1913)



Kleine Öltröpfen werden zwischen die geladenen Platten eines Kondensators gesprüht. Der Plattenabstand ist  $d$ . Mit Hilfe einer Röntgenröhre werden einige Moleküle des Öltröpfens ionisiert, so dass er die positive Ladung  $q$  erhält. Auf diese Ladung wirkt dann die Kraft  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  und zieht den Tropfen nach oben. Gleichzeitig wird der Öltröpfen von der Gewichtskraft  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  nach unten gezogen.

Mit der Spannung  $U$  wird das Feld  $E$  so eingestellt, daß die Schwerkraft  $F_g$  gerade kompensiert wird, also

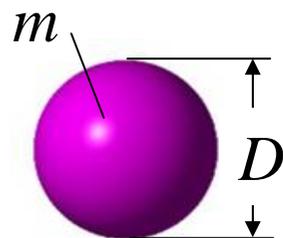
$$\vec{F}_g = -\vec{F}_e$$

$$\Rightarrow m g = q E = q \frac{U}{d}$$

Die Ladung des Öltropfens ist dann:

$$q = \frac{m g d}{U}$$

Es muß noch die Masse  $m$  des Tropfens ermittelt werden. Dazu bestimmt man z.B. mit einem Mikroskops den Durchmesser  $D$  des Tropfens.



Dann ist das Volumen:

$$V = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{D}{2} \right)^3$$

Mit der Dichte  $\rho_{\text{Öl}}$  ist die Masse:

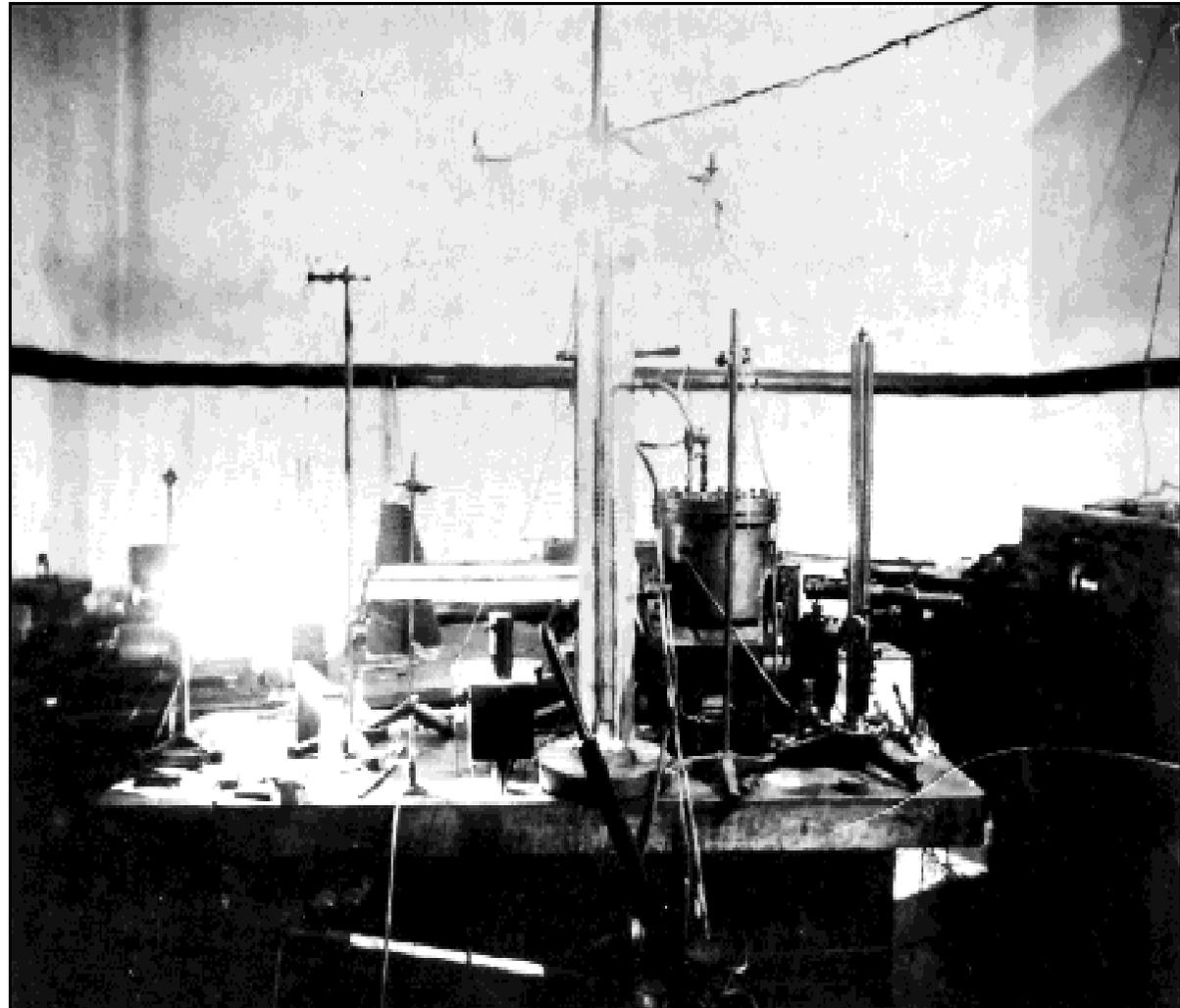
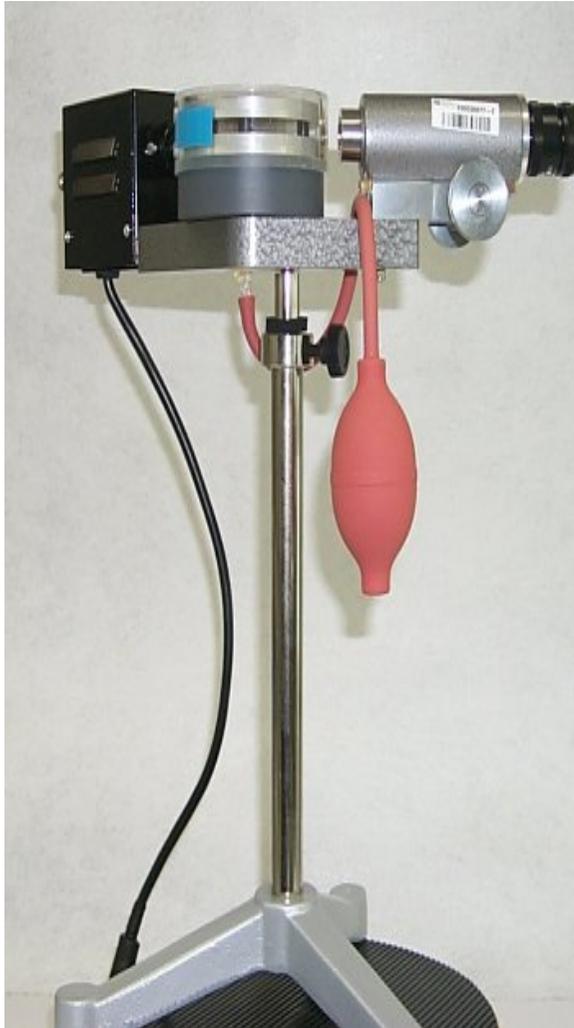
$$m = \rho_{\text{Öl}} V$$

Also ergibt sich für die Ladung  $q$  :

$$q = \frac{\rho_{\text{Öl}} g d}{U} \frac{4\pi}{3} \left( \frac{D}{2} \right)^3$$

Es ist trotzdem noch relativ schwierig den Durchmesser  $D$  der Öltröpfchen mit einem Mikroskop genau zu bestimmen. Für präzise Messungen bietet sich die Sinkgeschwindigkeitsmethode an. Weiter muss die Auftriebskraft in Luft berücksichtigt werden.

Moderne Version (links) und Originalaufbau (rechts) von Millikan (1913)

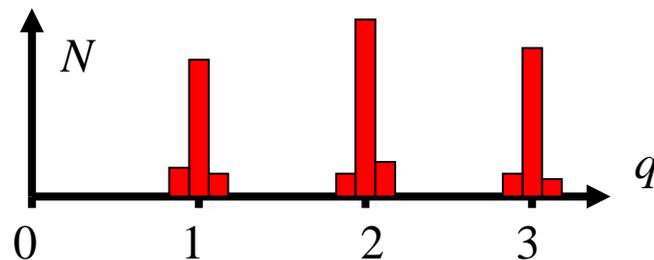


Messungen liefern diskrete Ladungen:

$$q = n e \quad n = \text{ganze Zahl}$$

mit der Elementarladung

$$e = 1.602189 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$



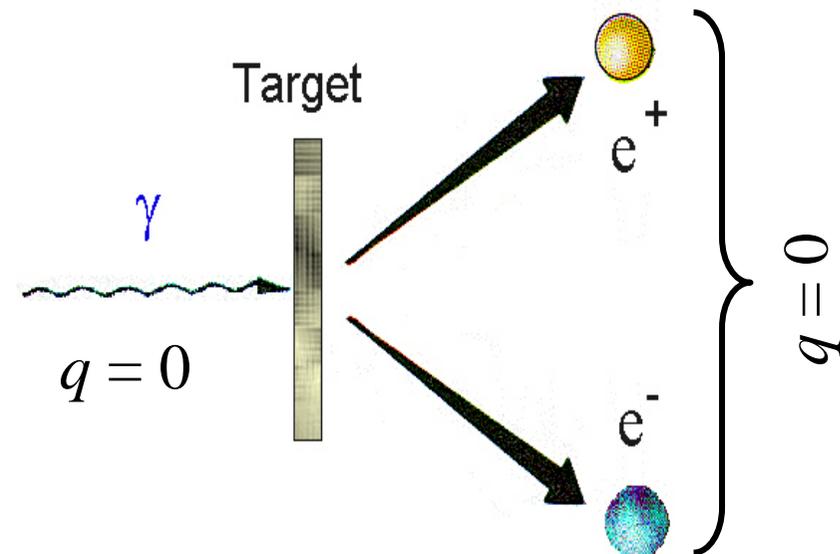
- Es gibt positive (+e) und negative (-e) Elementarladungen.
- Das Vorzeichen der Ladung ist so definiert, dass das Elektron die Ladung  $q = -e$  erhält.
- Es gibt Teilchen (die "Quarks") mit Ladungen  $1/3 e$  und  $2/3 e$ . Diese Teilchen kommen aber nie ungebunden vor.

## Ladungserhaltung

In einem abgeschlossenen System gilt der Satz von der Erhaltung der Gesamtladung:

$$\sum_{i=1}^N q_i = \text{const.}$$

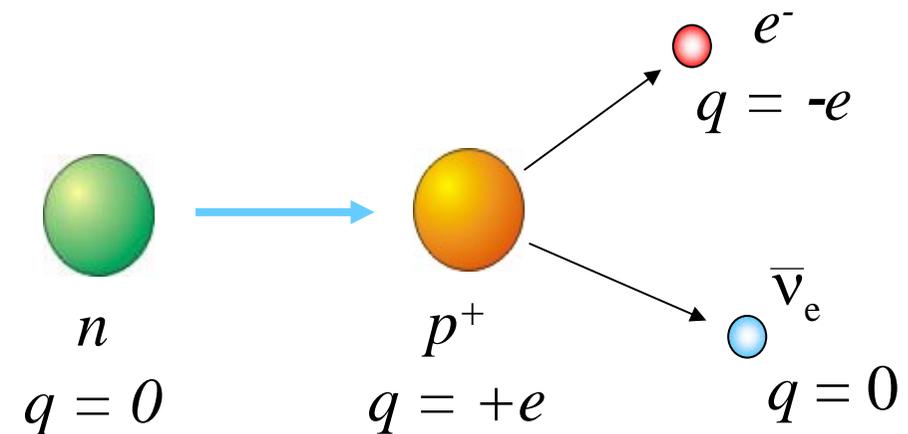
## Beispiel: Paarerzeugung



Werden aus einem hochenergetischen  $\gamma$ -Quant Elektronen erzeugt, dann treten sie immer paarweise mit entgegen gesetzten Ladungen auf. Natürlich müssen bei einem solchen Vorgang auch der Energieerhaltungs- und der Impulserhaltungssatz sowie noch weitere Erhaltungssätze (siehe Elementarteilchenphysik) erfüllt sein.

### Beispiel: Der Neutronenzerfall

Beim Zerfall des Neutrons (keine Ladung) entstehen ein positiv geladenes Proton, ein negativ geladenes Elektron und ein neutrales (Anti-) Neutrino.



$$q_{\text{ges, vorher}} = 0$$

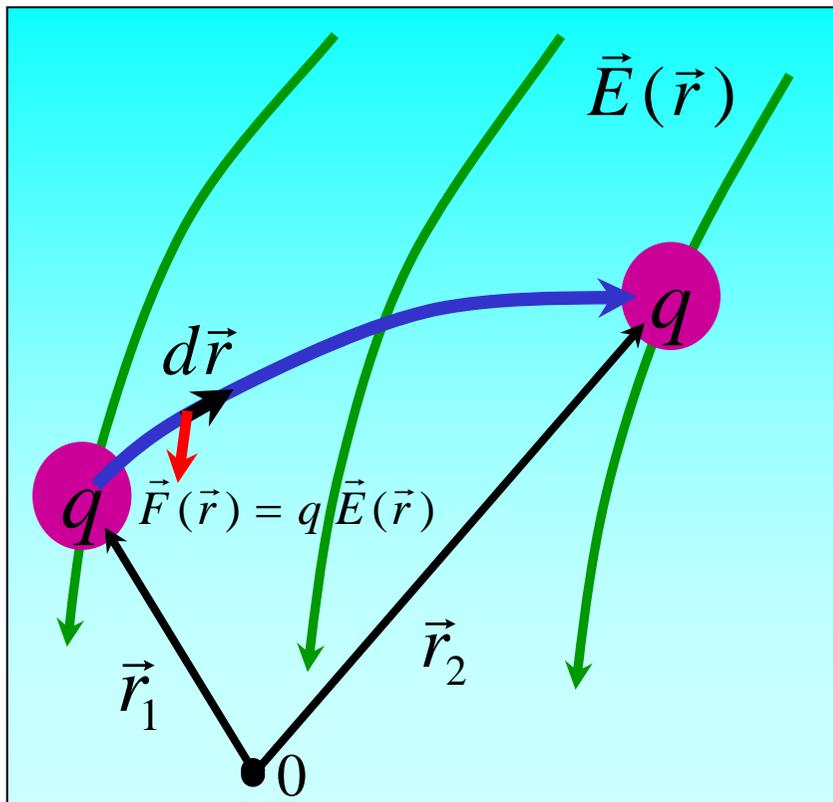
$$\sum_i q_{i, \text{nachher}} = q_{\text{Proton}} + q_{\text{Elektron}} + q_{\text{Neutrino}}$$

$$= +e + (-e) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow q_{\text{ges, vorher}} = q_{\text{ges, nachher}}$$

## 1.4 Potential und Spannung

Die Bewegung einer Ladung  $q$  im elektrischen Feld  $E$  erfordert eine Kraft. Damit lässt sich der Ladung eine vom Ort abhängige Lageenergie zuordnen.



Die Bewegung der Ladung vom Ort  $r_1$  zum Ort  $r_2$  erfordert die Arbeit  $W$ :

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Der Ausdruck

$$- \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U_2 - U_1$$

wird als Potential (-differenz) oder elektrische Spannung  $U$  zwischen den beiden Orten  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet.

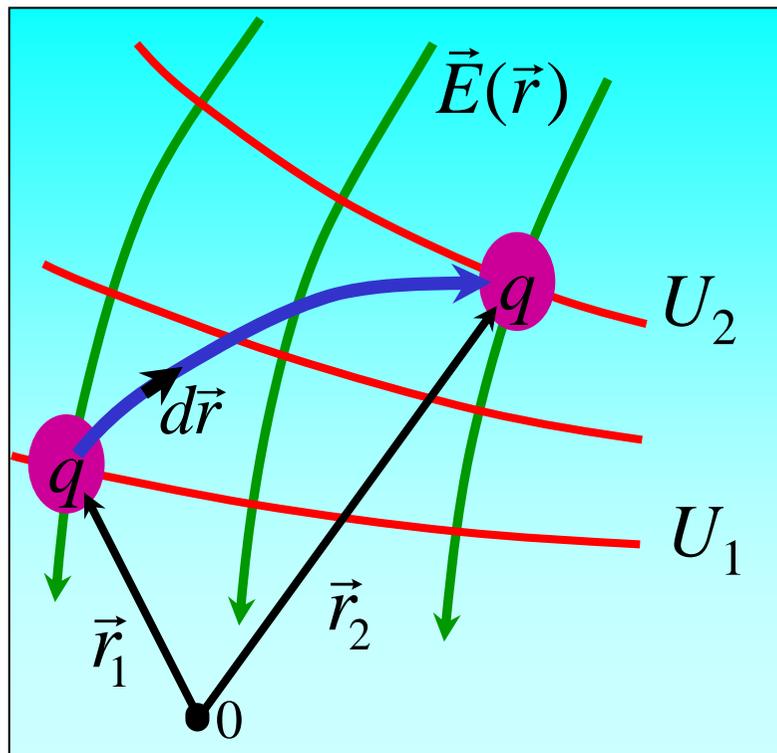
Die SI-Einheiten der Spannung und des elektrischen Feldes sind:

$$[U] = 1\text{V} = 1 \text{ Volt}$$

$$[\vec{E}] = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Für die Arbeit  $W$  im elektrostatischen Feld  $E$  gilt also:

$$W = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q(U_2 - U_1)$$



Sie ist vom Weg unabhängig. Daher ist das elektrostatische Feld ein konservatives Kraftfeld. Umgekehrt kann man damit das elektrische Feld als Gradient eines Skalarfeldes  $U$  darstellen, d.h. als Gradient der Spannung  $U$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial U / \partial z \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt, dass Äquipotentiallinien ( $U = \text{const.}$ ) senkrecht zur Richtung des elektrischen Feldes liegen.

### Beispiel: Potential einer Punktladung

Das elektrische Feld einer Punktladung  $Q$  ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

mit:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

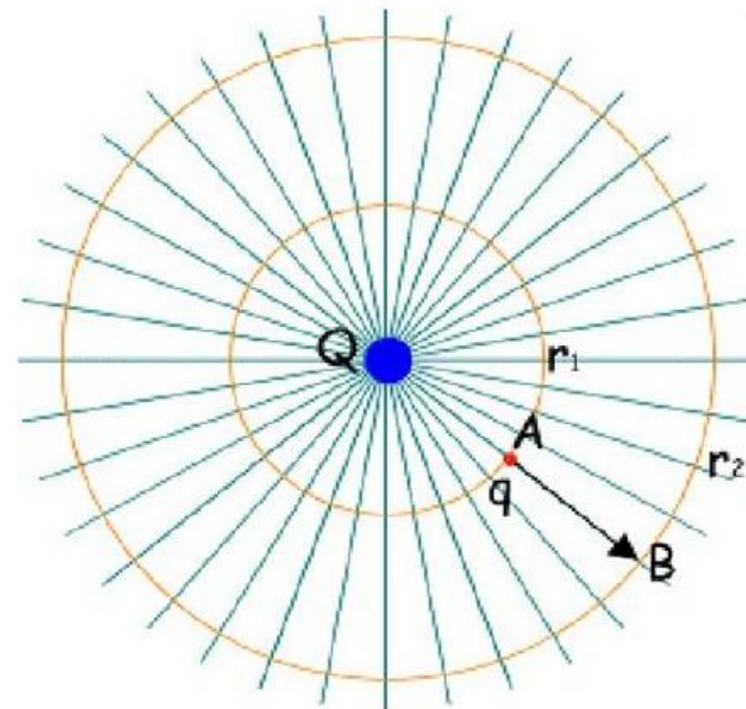
Daraus ergibt sich als Bestimmungsgleichung für  $U$  (hier:  $x$ -Komponente):

$$E_x(\vec{r}) = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für die  $y$ - und  $z$ -Komponenten. Als Lösung folgt für das Potential  $U$  einer Punktladung:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (+U_0)$$



Man hätte auch so vorgehen können:  
Die Arbeit  $W$ , um eine Probeladung  $q$   
von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  zu verschieben ist:

$$\begin{aligned}
 W &= -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
 &= -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} \\
 &= -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\
 &= q \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} \right)
 \end{aligned}$$

Der Weg ist hier radial nach außen  
gewählt.

Wegen  $W = q(U_2 - U_1)$  folgt wieder:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Eine Spannung (Potentialdifferenz) be-  
steht immer zwischen zwei Punkten. Im  
Fall der obigen Formel für  $U(r)$  liegt der  
eine Punkt im Unendlichen (wir haben  
hier  $U_0 = 0$  gesetzt), denn es ist:

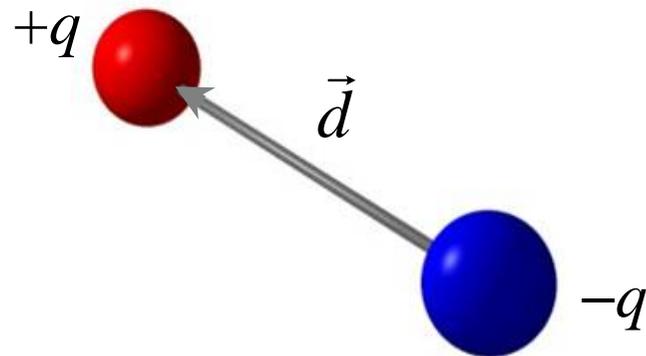
$$U(r) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty$$

In der Graphik liest man also die  
folgenden Potentialdifferenzen zwischen  
den Punkten  $A$  und  $B$  ab:

$$U_{AB} = U(r_2) - U(r_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

## 1.5 Elektrische Dipole

Sind zwei unterschiedliche Ladungen  $\pm q$  in einem Abstand  $d$  angeordnet, dann liegt ein elektrischer Dipol vor.



Man definiert das Dipolmoment:

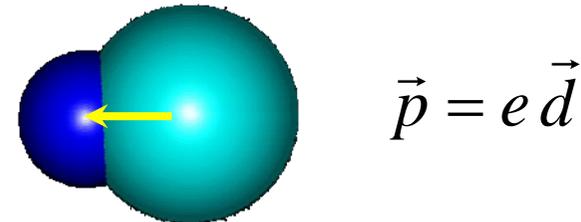
$$\vec{p} = q \vec{d}$$

Das Dipolmoment ist ein Vektor, der entlang der Verbindungslinie der Ladungen von "-" nach "+" zeigt.

### Beispiele:

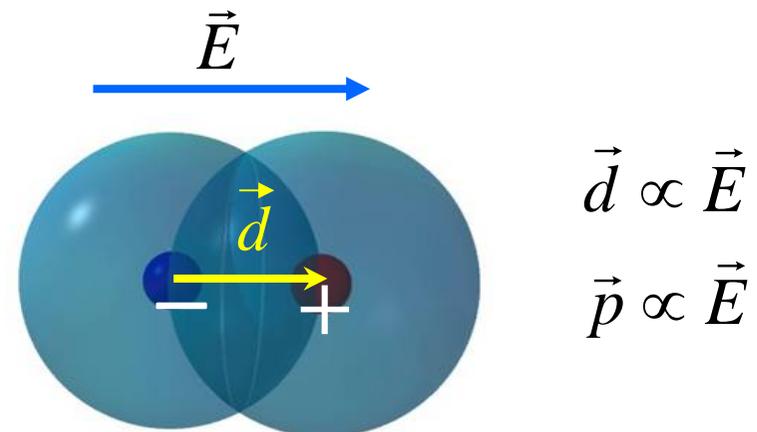
(i) HCl-Molekül:

H<sup>+</sup>-Ion und Cl<sup>-</sup>-Ion im Abstand  $d$



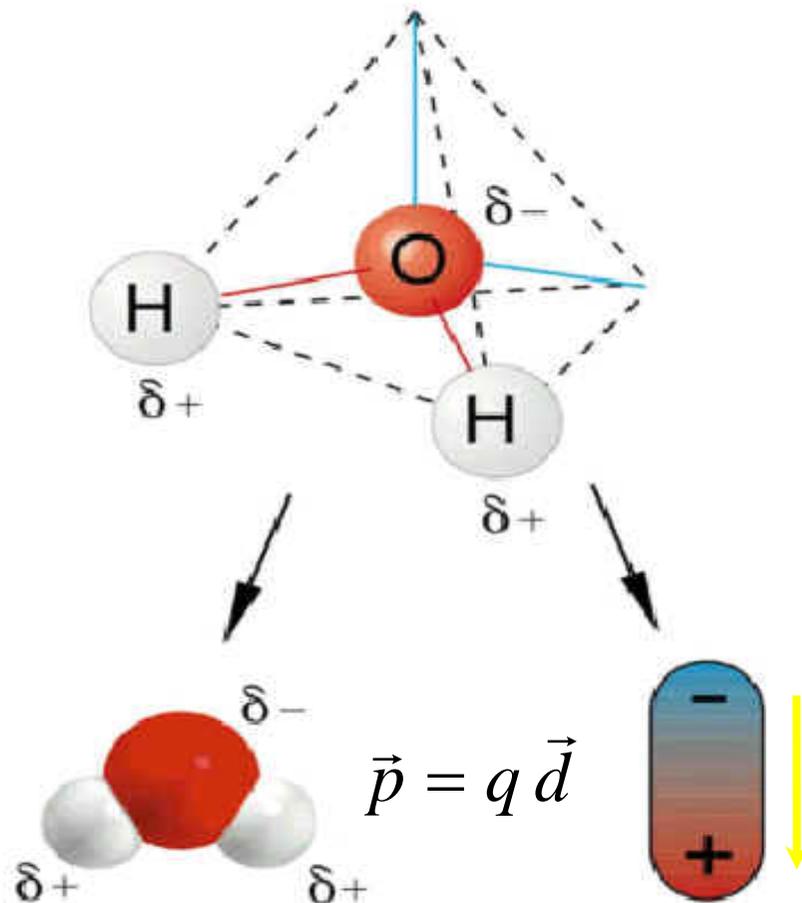
(ii) Induziertes Dipolmoment:

Ein äußeres Feld verschiebt den positiven und negativen Ladungsschwerpunkt z.B. in einem Xe-Atom.



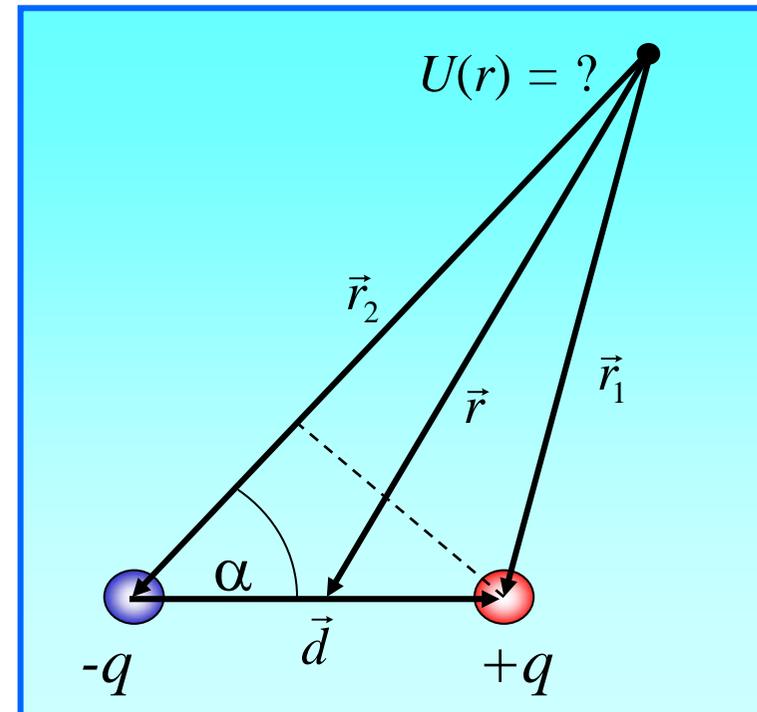
(iii) Komplizierte Ladungsverteilungen können in erster Näherung als Dipol angesehen werden:

Beispiel: Wassermolekül  $\text{H}_2\text{O}$



Das Potential des elektrischen Dipols folgt in diesem Fall einfach aus dem Potential der Einzelladungen. Für eine Punktladung  $q$  gilt:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$



Mit dem dem Superpositionsprinzip ergibt sich das Potential des Dipols zu:

$$U(r) = U_{+q} + U_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Betrachtet man das Potential  $U$  für einen sehr großem Abstand  $r$  vom Dipol, so ist  $r_1, r_2 \gg d$ . Dann gilt näherungsweise (siehe Zeichnung):

$$r_2 - r_1 = d \cos \alpha \quad \text{und} \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

Also wird im Fernfeld:

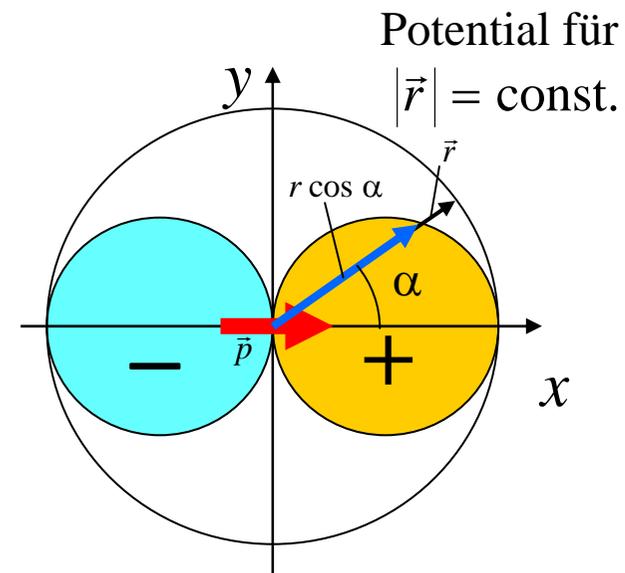
$$U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Das Potential eines Dipols nimmt mit der Entfernung wesentlich schneller ab als das einer Punktladung. Für sehr große Entfernungen gilt:

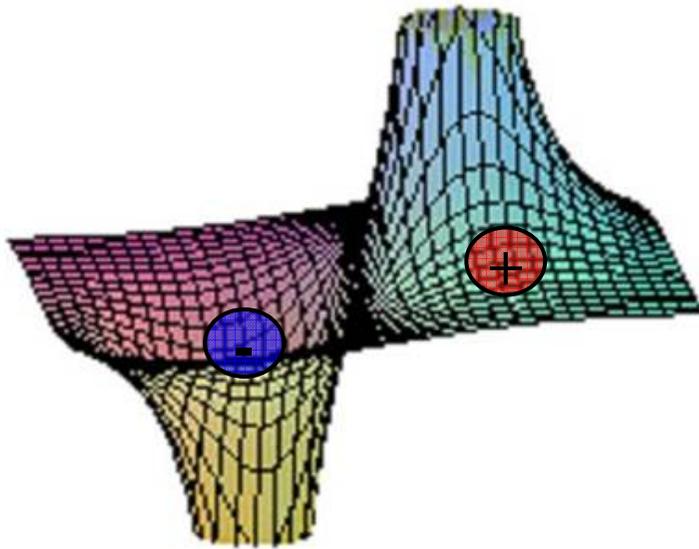
$$\text{Punktladung } q: \quad U(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$\text{Dipol:} \quad U(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Winkelabhängigkeit:} \quad U(r) \propto \frac{pr \cos \alpha}{r^3}$$



3D-Darstellung des Dipolpotentials:



Das elektrische Feld des Dipols kann jetzt mit der Beziehung

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

berechnet werden. Für das „Fernfeld“ ergibt sich dann (nach einer mitunter recht mühsamen Rechnung):

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\left( \frac{\partial U(r)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r)}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2d \cos \alpha}{r^3} \vec{e}_r - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-d \sin \alpha}{r^3} \vec{e}_\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

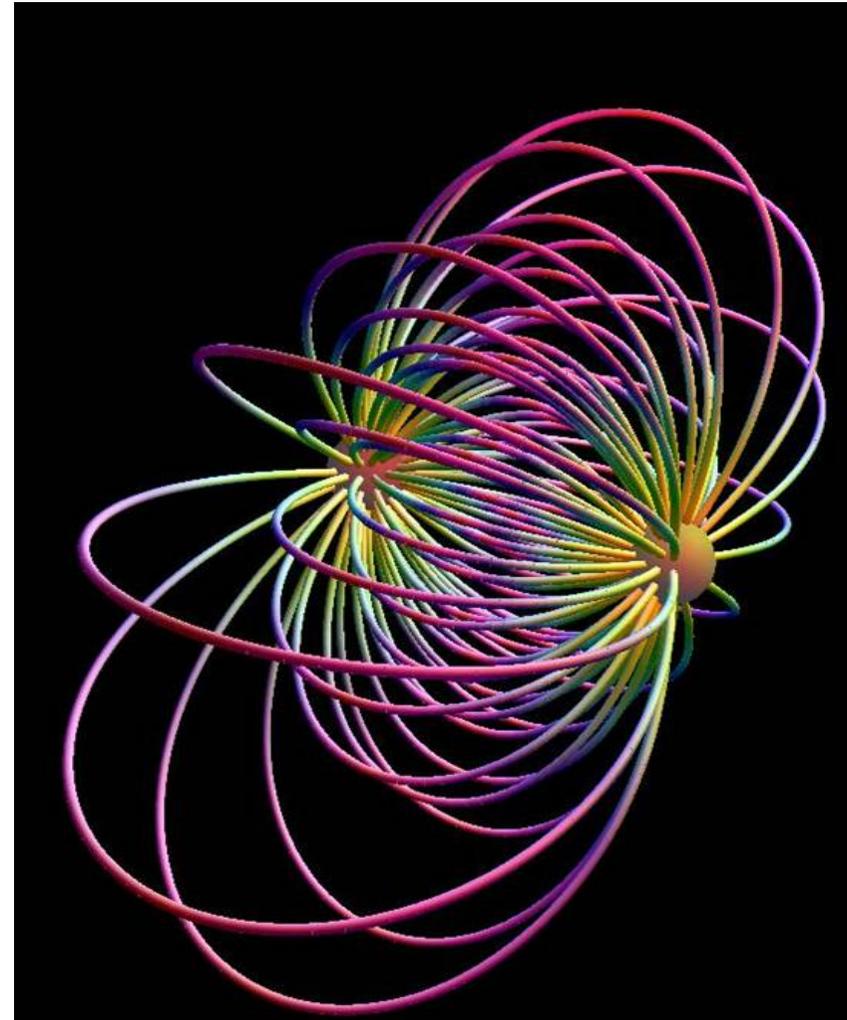
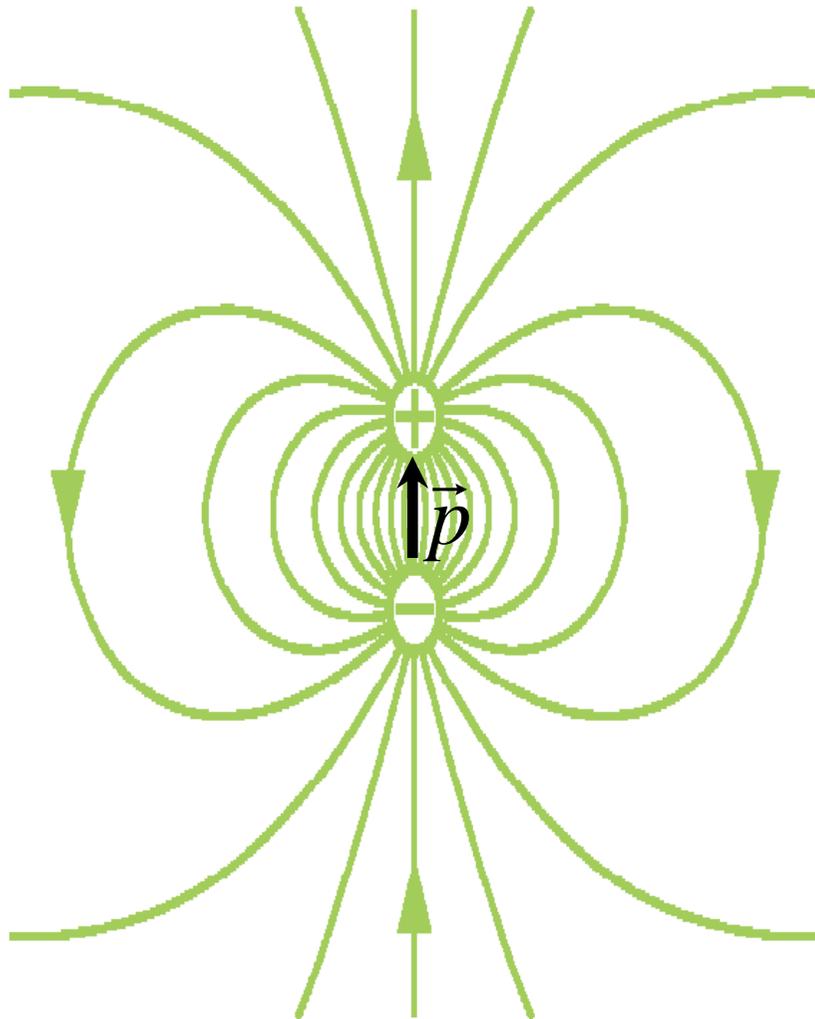
Das Dipolfeld ist kein radiales Feld. Für große Abstände  $r$  vom Dipol gilt im Vergleich zur Punktladung:

$$\text{Punktladung:} \quad |\vec{E}(\vec{r})| \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Dipol:} \quad |\vec{E}(\vec{r})| \propto \frac{1}{r^3}$$

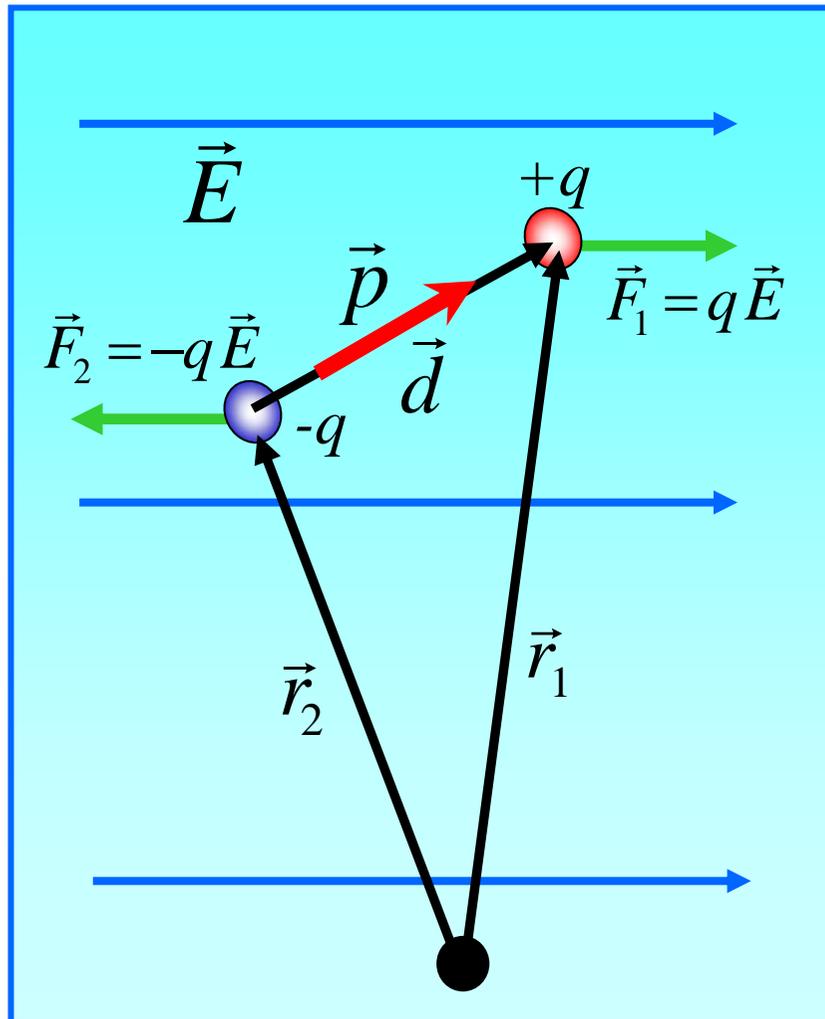
Das Dipolfeld fällt also ebenfalls schneller mit dem Abstand  $r$  ab als das Feld einer Punktladung.

Elektrisches Feld eines Dipols in zwei und drei Dimensionen



## Dipole in elektrischen Feldern

## (i) Homogenes Feld



Die resultierende Kraft auf den Dipol ist:

$$\vec{F}_{\text{Dipol}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$$

Der Dipol ist aber nicht in Ruhe, denn es wirkt ein Drehmoment:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{Dipol}} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= q\vec{r}_1 \times \vec{E} - q\vec{r}_2 \times \vec{E} \\ &= q \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{=\vec{d}} \times \vec{E} \end{aligned}$$

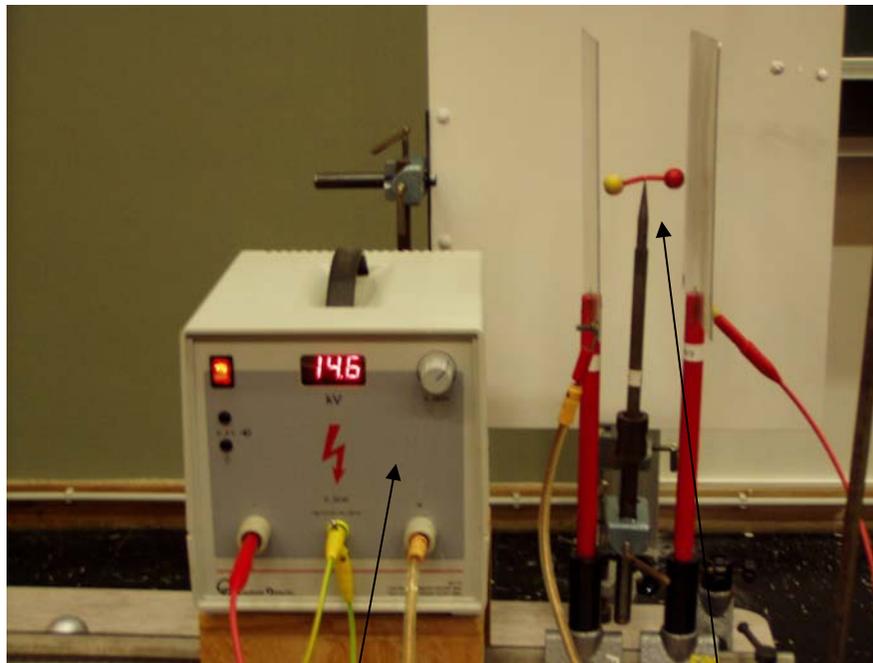
Mit der Definition des Dipolmoments

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

folgt für das Drehmoment:

$$\vec{M}_{\text{Dipol}} = \vec{p} \times \vec{E}$$

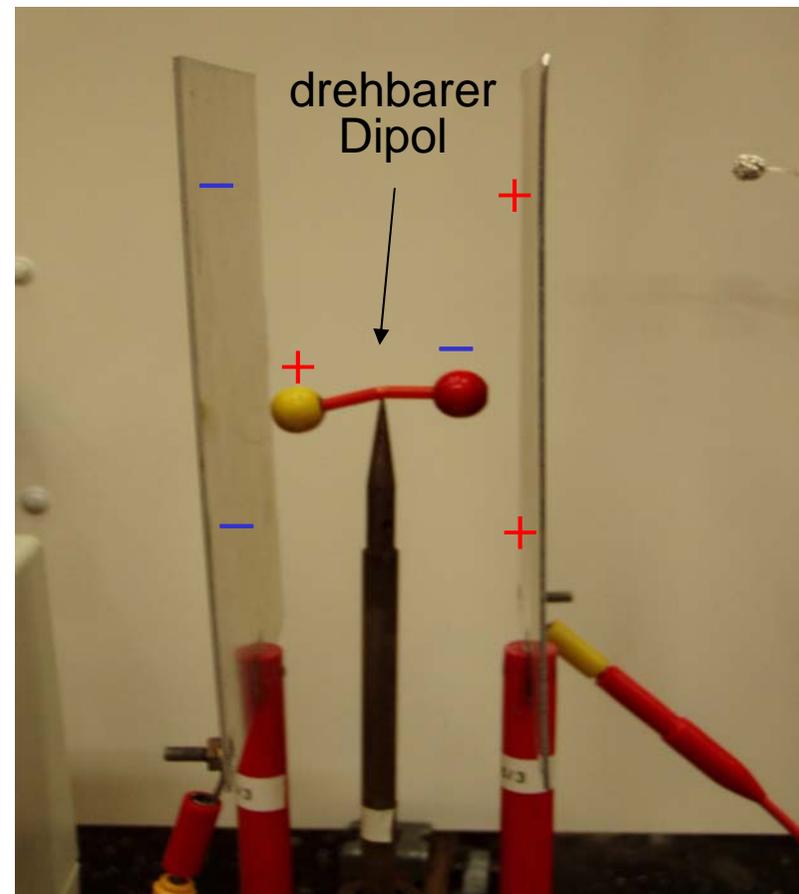
Versuch: Dipol im homogenen Feld



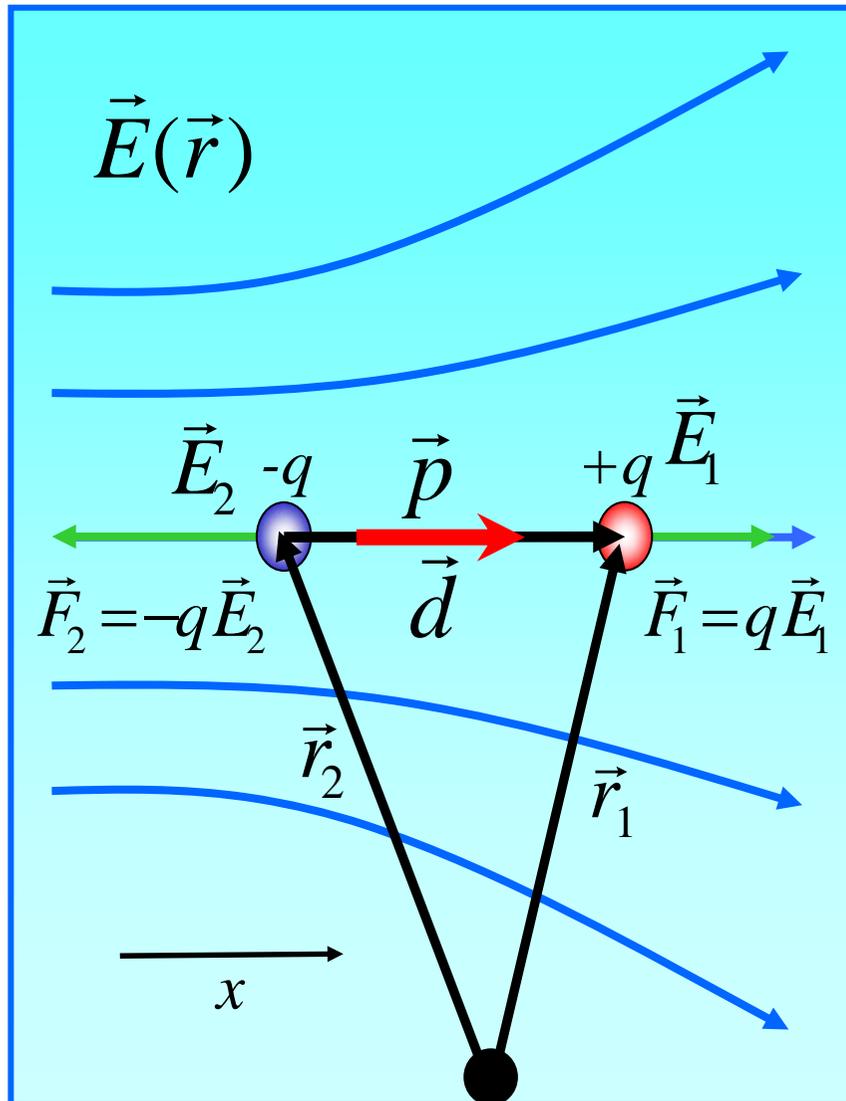
Hochspannungs-  
quelle

Kondensator  
mit Dipol

Der geladene elektrische Dipol richtet sich im elektrischen Feld aus. Polt man den Kondensator um, ändert sich auch die Richtung des Dipols entsprechend.



## (ii) Inhomogenes Feld



Die Kraft auf einen Dipol im inhomogenen elektrischen Feld ist:

$$\vec{F}_{\text{Dipol}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \vec{E}_1 - q \vec{E}_2$$

Für kleine Dipole, d.h. sehr kleines  $d$ , kann die elektrische Feldstärke entwickelt werden. In einer Dimension (d.h. alle Vektoren sind parallel) gilt:

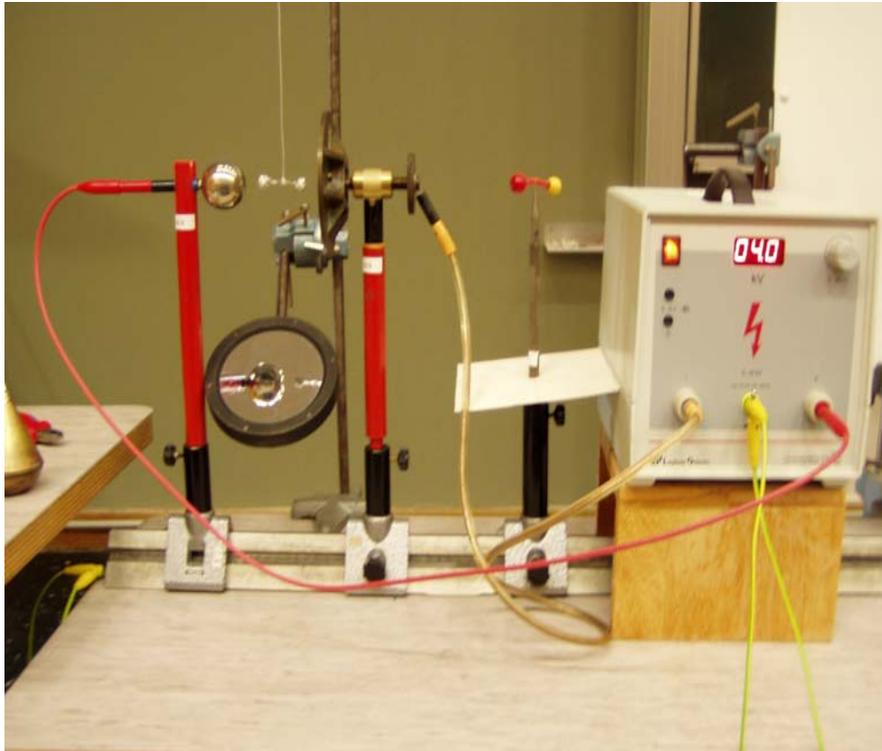
$$E_2 = E(\vec{r}_2), \quad E_1 = E(\vec{r}_1)$$

$$\Rightarrow E_2 = E_1 - \frac{dE}{dx} d$$

Einsetzen in die obige Gleichung für die Kraft auf den Dipol liefert:

$$F = qE_1 - q \left( E_1 - \frac{dE}{dx} d \right) = p \frac{dE}{dx}$$

Exp.: Dipol im inhomogenen Feld

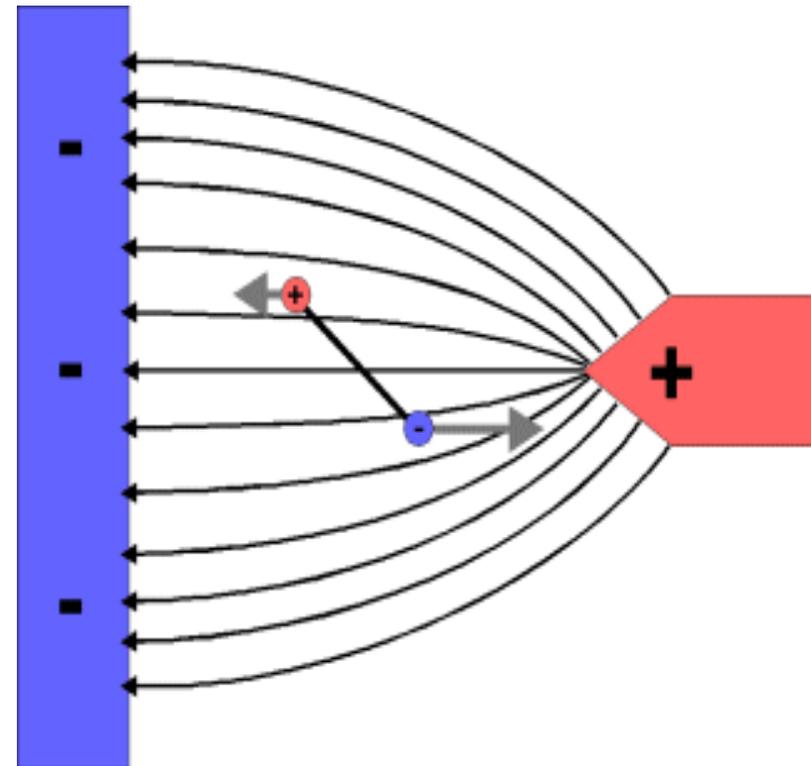


Dieses Resultat lässt sich auf den drei-

dimensionalen Fall verallgemeinern:

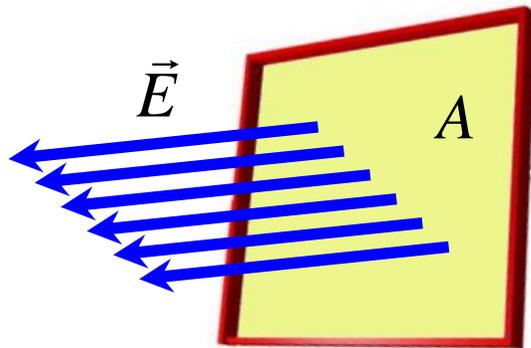
$$\vec{F} = \left( \vec{p} \cdot \vec{\nabla} |\vec{E}(\vec{r})| \right) \vec{n}$$

wobei:  $\vec{E}(\vec{r}) = |\vec{E}(\vec{r})| \vec{n}$



## 1.6 Elektrischer Fluss; Gaußscher Satz

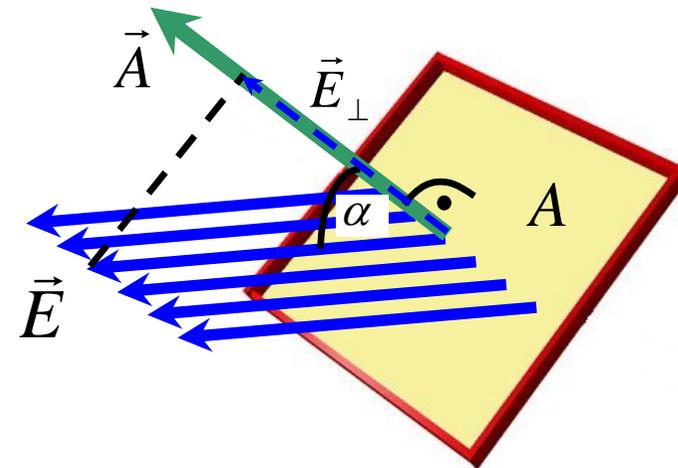
Der elektrische Fluss  $\Phi$  eines Feldes  $E$  ist ein Maß für die „Anzahl“ der Feldlinien, die durch eine Fläche  $A$  hindurch treten (Feldliniendichte).



Wenn die Feldlinien senkrecht auf der Fläche  $A$  stehen, dann ist der elektrische Fluss durch diese Fläche definiert durch:

$$\Phi = |\vec{E}| A = E A$$

Treten die Feldlinien nicht senkrecht durch die Fläche, geht nur die senkrechte Komponente des Feldes ein. Dies lässt sich schreiben durch den Flächenvektor  $\vec{A}$ . Der Betrag dieses Vektors ist so groß wie die Fläche; seine Richtung ist senkrecht zur Fläche, also:

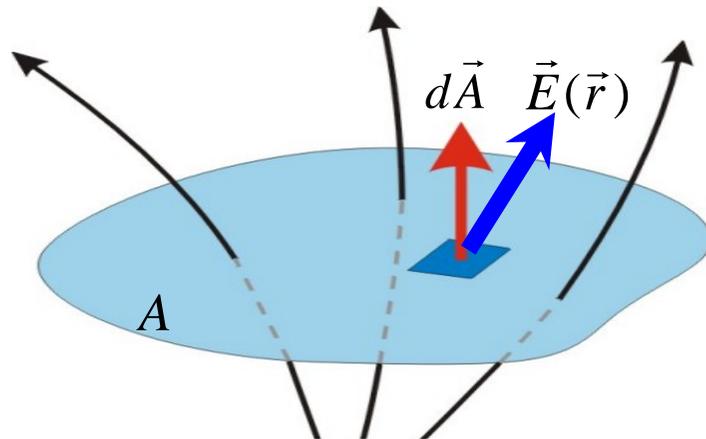


$$\Phi = |\vec{E}_\perp| A = |\vec{E}| A \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Alle bisherigen Betrachtungen gelten nur, wenn das durch die Fläche  $A$  tretende Feld  $E$  konstant ist. Ist dies nicht der Fall, dann muss der Fluss durch Summation bestimmt werden.

Für eine beliebig geformte Fläche  $A$  gilt im Fall eines inhomogenen Feldes:



Der elektrische Fluss  $d\Phi$ , der durch die Fläche  $dA$  tritt, ist dann:

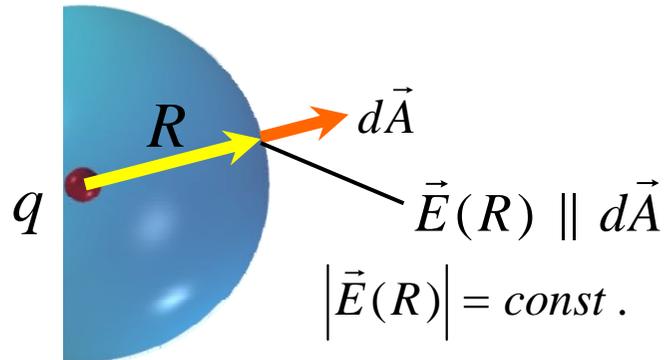
$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Der gesamte elektrische Fluss  $\Phi$  durch die Fläche  $A$  ist dann durch Summation (Integration) über alle Einzelbeiträge  $d\Phi$  durch die Flächen  $dA$  gegeben:

$$\Phi = \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Das Integral über die Fläche  $A$  ist in der Regel nicht ganz einfach zu bestimmen. Es ist wie ein Wegintegral durch Parametrisierung der Fläche  $A$  berechenbar. Hierfür können aber meistens einfache Symmetrien zur Berechnung herangezogen werden.

Beispiel: Fluss des Feldes einer Ladung durch eine Halbkugel mit Radius  $R$ .



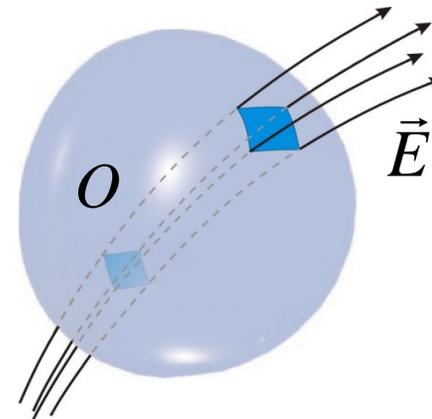
$$\Phi = \iint_{\text{Halbkugel}} \vec{E}(R) \cdot d\vec{A} = \iint_{\text{Halbkugel}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r} \cdot d\vec{A}$$

$$d\vec{A} = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \hat{r} \quad (\text{Kugelkoordinaten})$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r} \cdot \hat{r} R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^\pi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{2\pi} = \frac{q}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Elektrischer Fluss durch geschlossene Oberflächen

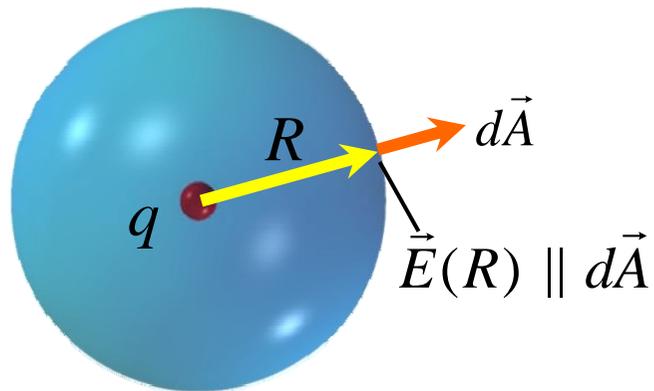
Nun soll speziell der elektrische Fluss durch geschlossene Flächen betrachtet werden. Dies ist zentral für die später folgende 1. Maxwell-Gleichung.



Schreibweise:

$$\Phi = \oiint_O \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Beispiel: Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung  $q$  durch eine Kugel mit dem Radius  $R$ .



Wie im Beispiel vorher gilt nun:

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{\text{Kugel}} \vec{E}(R) \cdot d\vec{A} \\ &= \oiint_{\text{Kugel}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

$$d\vec{A} = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \hat{r}$$

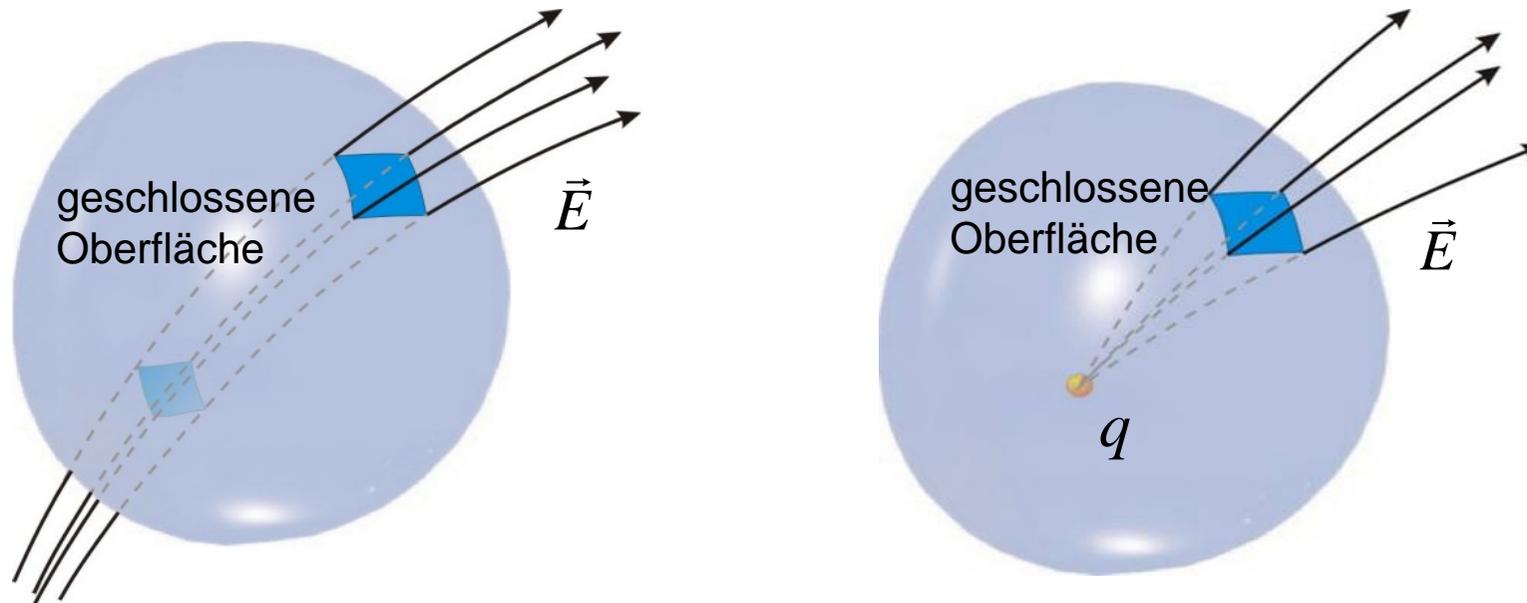
$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r} \cdot \hat{r} R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta d\varphi}_{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Es lässt sich mathematisch zeigen, dass dieses Resultat ganz allgemein für jede beliebig geformte, geschlossene Oberfläche gilt, d.h.:

$$\oiint_{\text{geschl. Fläche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Diese Beziehung wird häufig auch als „Gaußscher Satz“ bezeichnet.

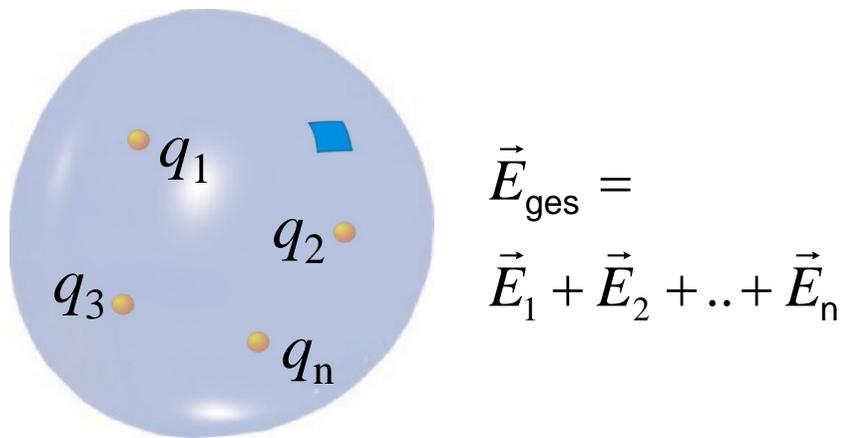
Noch allgemeiner gilt für eine Punktladung der folgende Zusammenhang:



$$\oiint_{\text{geschl. Fläche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{falls } q \text{ innerhalb der geschl. Fläche liegt.} \\ 0 & \text{falls } q \text{ außerhalb der geschl. Fläche liegt.} \end{cases}$$

### Gaußscher Satz (allgemein)

Bei mehreren Ladungen im Innern der Oberfläche  $O$  gilt das Superpositionsprinzip:



Damit folgt:

$$\begin{aligned} \oiint_O \vec{E}_{\text{ges}} \cdot d\vec{A} &= \sum_{i=1}^n \oiint_O \vec{E}_i \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{q_{\text{ges}}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung integriert man über alle Ladungselemente  $dq$  im von der geschlossenen Oberfläche  $O$  umschlossenen Volumen:

$$\sum_{i=1}^n q_i \Rightarrow \iiint_{V(O)} dq$$

Mit der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$$

folgt das Volumenintegral

$$\iiint_{V(O)} dq = \iiint_{V(O)} \rho(\vec{r}) dV$$

Damit ergibt sich der Zusammenhang zwischen einer beliebigen Ladungsverteilung im Raum und dem von dieser Ladungsverteilung erzeugten elektrischen Feld:

$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ges}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(O)} \rho dV$$

### Bemerkungen:

- Dies ist die 1. Maxwell-Gleichung. Sie wird auch Gaußscher Satz oder Satz vom Hüllenfluss genannt. Der Gaußsche Satz ist ein allgemeiner Integralsatz der Mathematik für Vektorfelder.
- Die obige Gleichung bedeutet anschaulich, dass Ladungen die Quellen (und Senken) des elektrostatischen Feldes sind. Feldlinien beginnen und enden daher bei positiven bzw. negativen Ladungen.
- Mit Hilfe der 1. Maxwell-Gleichung können elektrische Felder berechnet werden, wenn die Ladungsverteilung bekannt ist.
- Es ist zu beachten, dass jede beliebig geformte Oberfläche  $O$ , welche die Ladung  $q_{\text{ges}}$  umschließt, verwendet werden kann.

## 1.7 Maxwell-Gleichungen für elektrostatische Felder

Wir hatten bisher die folgenden zwei wichtigen Eigenschaften des elektrostatischen Feldes kennen gelernt:

$$(i) \quad \oiint_o \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ges}}}{\epsilon_0}$$

$$(ii) \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

Zunächst wollen wir die zweite Eigenschaft noch etwas anders schreiben. Wir wissen bereits, dass die Existenz eines Potentials bedeutet, dass das Linienintegral über das elektrische Feld nicht vom Weg zwischen dem Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Insbesondere gilt für geschlossene Wege, d.h. für Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt:

$$\oint_{\text{geschl. Weg}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Dies ist bereits die 3. Maxwell-Gleichung für das elektrostatische Feld in integraler Schreibweise.

Die 3. Maxwell-Gleichung ist erst in der Elektrodynamik vollständig.

Jetzt soll die differentielle Schreibweise der Maxwell-Gleichungen eingeführt werden. Dies erfordert ein wenig Mathematik.

Dafür werden zwei so genannte „Integralsätze“ verwendet, die später ausführlicher erläutert werden. Es gilt für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{E}$  sowie für eine geschlossene Oberfläche  $O$ , die ein Volumen  $V$  umschließt, sowie eine Fläche  $A$  mit der Randkurve  $\partial A$ :

**Satz von Gauß** (Oberflächenintegral  $\Leftrightarrow$  Volumenintegral):

$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(O)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$



Carl-Friedrich Gauß  
(1777-1855)

**Satz von Stokes** (Wegintegral  $\Leftrightarrow$  Flächenintegral):

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$



George Gabriel Stokes  
(1819-1903)

Die 1. Maxwell-Gleichung lautet:

$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{ges}}}{\epsilon_0}$$

Nun kann die im von der Oberfläche  $O$  umschlossenen Volumen  $V$  enthaltene Gesamtladung  $q_{\text{ges}}$  durch die Ladungsdichte  $\rho$  ausgedrückt werden:

$$q_{\text{ges}} = \iiint_{V(O)} \rho dV$$

Mit dem Gaußschen Satz folgt für die linke Seite der 1. Maxwell-Gleichung:

$$\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(O)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

Wenn nun die rechte Seite durch die Ladungsdichte ausgedrückt wird ergibt sich:

$$\iiint_{V(O)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(O)} \rho dV$$

Da dies für jede Oberfläche, die die Gesamtladung  $q_{\text{ges}}$  umschließt, gelten soll, müssen die Integranden links und rechts übereinstimmen, also:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dies ist die 1. Maxwell-Gleichung in differentieller Form.

Wie auch schon in der Mechanik (Kraftfelder), so ist auch in der Elektrodynamik die Existenz eines Potentials gleichbedeutend mit der Wirbelfreiheit des Vektorfeldes. Es gilt daher für das elektrostatische Feld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Dies ist die 3. Maxwell-Gleichung in differentieller Form. Für das elektrostatische Feld gilt daher zusammengefasst:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} & \iint\limits_o \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \begin{array}{c} \text{Gauss} \\ \Leftrightarrow \\ \text{Maxwell} \end{array} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \text{(iii)} & \oint\limits_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \text{Stokes} \end{array} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}
 \end{array}$$